Charakterisierungen schwacher Kompaktheit in Dualräumen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
Dr. rer. nat.

vorgelegt dem Fachbereich 6
Mathematik/Informatik
an der Universität Osnabrück

von
Christian Möller

Osnabrück
2003

Inhaltsverzeichnis

Einführung und Aufbau **1**

1 Grundlagen **5**

1.1 Schwache Topologien, starke Operatortopologie 5

1.2 Die Folgenräume $l^p(M)$ 7

1.3 Vektormaße und Operatoren 12

2 Schwache Kompaktheit in Dualräumen **23**

2.1 Verbandseinbettbarkeit von $l^\infty(M)$ in einen σ-Dedekind vollständigen Banachverband 23

2.2 Restriktion σ-ordnungs stetiger Funktionale 26

2.3 Schwache Kompaktheitseigenschaften im Dual eines σ-Dedekind vollständigen M-Raumes mit Ordnungseins . 31

3 Anwendungen der Ergebnisse auf Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren **44**

3.1 Restriktion ordnungs-schwach kompakter Operatoren 44

3.2 Ein Zerlegungssatz für ordnungs-schwach kompakte Operatoren 48

3.3 Kompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren in der starken Operatortopologie 52

Literatur **61**

Einführung und Aufbau

In der Theorie der Banachverbände und positiven Operatoren haben unter anderem H. H. Schaefer und X. D. Zhang wesentliche Impulse geliefert. Wir wollen in dieser Arbeit einen Aspekt herausgreifen, der die schwache (schwach*) Kompaktheit in gewissen Dualräumen thematisiert. Basierend auf den Arbeiten [Zh] von X. D. Zhang und [SZ1], [SZ2], [SZ3] von H. H. Schaefer und X. D. Zhang geben wir Charakterisierungen der schwach kompakten Teilmengen im Dual eines σ-Dedekind vollständigen M-Raumes mit Ordnungseins an und verallgemeinern damit die Aussagen der Theoreme 1.1, 1.3 in [Zh] bzw. der Theoreme 1.1 und 2.1 in [SZ3]: Wir betrachten eine beschränkte Teilmenge A endlich-additiver Skalarmaße, also in $\mathrm{B}(\Sigma)^*$, um die Dualität ins Spiel zu bringen. Sind die Maße in A sogar σ-additiv, so sind schwache und schwach* Kompaktheit von A äquivalent und im Wesentlichen dadurch charakterisiert, dass die Maße in A gleichmäßig stark additiv (= gleichmäßig σ-additiv) sind. Ohne diese zusätzliche Eigenschaft muss man neben der schwach* Kompaktheit von A die Existenz eines Kontrollmaßes für A fordern, damit obige Charakterisierung gültig bleibt. Indem wir diese Gleichmäßigkeitsbegriffe für Vektormaße auf $\sigma(E^\sim, E)$-beschränkte Teilmengen $A \subset E^\sim$ ausdehnen, wobei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum ist (siehe Def. 2.3.5), erhalten wir die Verallgemeinerungen in Form der Theoreme 2.3.10 und 2.3.11.

Als „Vorstufe“ hierzu nimmt Theorem 2.3.7 in dieser Arbeit eine zentrale Rolle ein, zumal wir hier einen schon recht allgemeinen Standpunkt einnehmen: Für eine beschränkte Teilmenge A von E^* werden wir die (relative) schwache Kompaktheit von A nicht nur durch eine Reihe sowohl geometrischer (fast ordnungs-beschränkt) als auch topologischer Eigenschaften (schwach* folgen präkompakt, lokal norm-kompakt in noch zu präzisierendem Sinne) beschreiben, sondern auch dadurch, dass wir die Bedingungen $A \subset E_c^*$ bzw. $A \subset \mathrm{B}(\lambda) \subset E^*$ mit $E = \mathrm{B}(\Sigma)$ aus den ursprünglichen oben genannten Arbeiten durch die geringfügig allgemeinere Eigenschaft $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset E_c^* + \mathrm{B}(\lambda)$ ersetzen. Die hierfür notwendigen Beweistechniken sind im Gegensatz zu den recht stark maßtheoretisch orientierten Argumenten der Arbeiten von H. H. Schaefer und X. D. Zhang von überraschend elementarer Art und basieren im Wesentlichen darauf, dass der Raum $l^1(M)$ die Schur-Eigenschaft besitzt.

Wir haben hierbei vorausgesetzt, dass E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins ist. In einigen Fällen werden wir auch ähnliche Aussagen für $\sigma(E^\sim, E)$-kompakte Teilmengen von $E^\sim$ beweisen (siehe

2.3.13), wobei E allgemeiner ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum ist. Solch ein Raum hat nämlich lokal stets die Struktur eines σ-Dedekind vollständigen M-Raumes mit Ordnungseins ([MN2], Prop. 1.2.13) und wir können unsere Ergebnisse darauf anwenden. Dieser triviale „Trick" wird uns auch an anderer Stelle nützlich sein (Theorem 3.3.11).

In einem letzten Verallgemeinerungsschritt gehen wir dann zu den kompakten Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren in $\mathcal{L}(E, X)$ über, wobei wir die schwach* Topologie durch die starke Operatortopologie ersetzen müssen. Hierbei sei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum. Typischerweise sind solche Resultate an die klassischen Theoreme von Vitali-Hahn-Saks gekoppelt, wenn man beachtet, dass punktweise konvergente Folgen stark additiver Maße (= ordnungs-schwach kompakter Operatoren) zusammen mit dem Grenzmaß eine schwach* kompakte Teilmenge von $\mathrm{B}(\Sigma)^*$ erzeugen (siehe Bemerkungen zu Theorem 3.3.2). Motiviert durch entsprechende Ergebnisse in der Arbeit *On The Vitali-Hahn-Saks Theorem* von H.H. Schaefer und X. D. Zhang können wir in Anlehnung an Theorem 10 ([SZ2]) eine Verallgemeinerung eines Vitali-Hahn-Saks Theorems für Vektormaße auf $L_s(E, X)$-kompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren und gleichzeitig auch eine leicht allgemeinere Version (mit E anstelle von $\mathrm{B}(\Sigma)$) des gerade genannten Satzes zeigen. Abschließend beweisen wir ein entsprechendes Resultat für $L_s(E, X)$-folgen präkompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren.

Wir geben jetzt über die einzelnen Kapitel einen kurzen Überblick, der weiter zum Verständnis der gerade gemachten Einführung beitragen soll und gewisse Aspekte noch unterstreicht.

Im **ersten Kapitel** stellen wir die nötigen topologischen und auch maßtheoretischen Grundlagen zur Verfügung. Wir führen neben den Dualraumtopologien $\sigma(E, E^{\sim})$ und $\sigma(E^{\sim}, E)$ auch die starke Operatortopologie ein. Sodann werden die Räume $l^p(M)$ in voller Allgemeinheit, also mit beliebiger Indexmenge M eingeführt. Als zentrales Ergebnis erhalten wir dabei als Folgerung aus Phillips' Lemma die Schur-Eigenschaft des Raumes $l^1(M)$. Maße mit Werten in einem Banachraum X werden abschließend studiert. Zentraler und für alles weitere bestimmender Aspekt ist hier die Verbandsidentifizierung beschränkter (σ-additiver) Skalarmaße durch gewisse stetige (σ-ordnungs stetige) lineare Funktionale. Ein Zusammenhang zur Schur-Eigenschaft wird dann über die Verbandsidentifizierungen $\mathrm{ca}(M) = l^\infty(M)^*_c = l^1(M)$ für $M \subset \mathbb{N}$ hergestellt. Im Sinne von Theorem 1.3.9 führen wir die ordnungs-schwach kompakten bzw. σ-ordnungs-norm stetigen Operatoren als Verallgemeinerung der stark additiven bzw. σ-additiven Vektormaße ein. Wir erwähnen noch, dass wir die verbandstheoretischen ebenso wie gewisse funktionalanalytische Methoden als bekannt voraussetzen (Hahn-Banach Theoreme, Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, um nur einige zu nennen).

Im anschließenden **zweiten Kapitel** finden sich die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit. Die beiden ersten Unterabschnitte haben hier vorbereitenden Charakter. Zunächst erläutern wir, unter welchen Voraussetzungen der Raum l^∞ in einen σ-Dedekind vollständigen Banachverband „verbandseinbettbar" ist. Wir entwickeln dabei eine Technik, die es erlaubt aus gewissen ordnungs-beschränkten disjunkten Familien einen zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorphen Vektorverband zu erzeugen (siehe 2.1.3 und 2.1.4). Dies ist vor allem für den Abschnitt 2.3. ein zentrales Beweisargument. Restriktionen σ-ordnungs stetiger Funktionale werden sodann thematisiert. Wir geben zwei völlig unterschiedliche Beweistechniken an, um zunächst zu zeigen, dass sich jedes stetige Funktional auf l^∞ auf einen geeigneten Unterverband $l^\infty(M)$ σ-ordnungs stetig einschränken lässt. Dies benötigen wir im Verlauf der Arbeit genauso wie die Tatsache, dass die Restriktion eines σ-ordnungs stetigen Funktionals auf einen zu l^∞ verbandsisomorphen Unterverband diese Abbildungseigenschaft sozusagen mitvererbt. Es folgt mit Abschnitt 2.3 der eigentliche Kernbereich, in dem sich die in der Einführung bereits angesprochenen Kompaktheitscharakterisierungen finden lassen. Hier werden wir auch zeigen, dass schwach* folgen präkompakte bzw. „kleine" schwach* kompakte Teilmengen von E^* sogar (relativ) norm-kompakt sind, wenn man sich nur auf zu l^∞ verbandsisomorphe Unterverbände einschränkt, was dem Satz 2.3.6 in der diskreten Situation entspricht. Schließlich beweisen wir mit unseren Mitteln Theorem 2.5.1 in [MN2] wesentlich einfacher, wenn E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum ist statt nur die Interpolationseigenschaft (I) zu besitzen. Wir werden hier beide Beweise angeben, da die Strukturen des allgemeineren Beweises im Beweis zu Theorem 3.3.11 teilweise mit hinübergezogen werden.

Dem Studium ordnungs-schwach kompakter Operatoren widmen wir uns schließlich im **dritten Kapitel**. Dabei geht es zunächst um Eigenschaften des einzelnen Operators an sich. In Anlehnung an ein Restriktionstheorem von Pelczynski werden wir zeigen können, dass ein ordnungs-schwach kompakter Operator sich lokal als dualer Operator eines kompakten Operators darstellen lässt, woraus folgt, dass sich ein schwach kompakter Operator auf einem σ-Dedekind vollständigen Banachverband mit nicht ordnungs stetiger Norm kompakt auf einen zu l^∞ verbandsisomorphen Unterverband einschränken lässt. Der Abschnitt 3.2 kann als unabhängig angesehen werden in dem Sinne, dass er keine Ergebnisse dieser Arbeit benutzt. Hier geben wir eine Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes von Yosida-Hewitt an, die durch schrittweise Dualisierung bewiesen wird. Wir benötigen das im nächsten Abschnitt, in dem weitere zentrale Ergebnisse dieser Arbeit in Erscheinung treten: Verschiedene Darstellungen der Vitali-Hahn-Saks Theoreme werden in Anlehnung an Ergebnisse in [SZ2] auf $L_s(E, X)$-kompakte (-folgen präkompakte) Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren ausgedehnt.

Danksagung

Zunächst möchte ich meinem Doktorvater Herrn Professor Dr. Peter Meyer-Nieberg meinen Dank aussprechen. Die Faszination für die Funktionalanalysis als Synthese aus algebraischen und topologischen Gesichtspunkten sowie Aspekten der Analysis, die sich seit meiner ersten Vorlesung von ihm auf mich übertrug, bewirkte, dass ich sofort gern bereit war, über diese interessante Thematik aus dem Teilgebiet der Banachverbände und positiven Operatoren weiter zu forschen. Ich danke ihm auch für seine stets hilfsbereite und besonnene Begleitung bei meiner Arbeit!

Meiner Frau, meinen Eltern und Schwiegereltern gilt ebenfalls mein Dank für die mir entgegengebrachte Unterstützung!

1 Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die notwendigen topologischen- und maßtheoretischen Grundlagen zur Verfügung. Wir richten zunächst unser Augenmerk auf die schwache bzw. schwach* Topologie. Die starke Operatortopologie wird kurz im letzten Kapitel dieser Arbeit benötigt. Die für diese Arbeit fundamentale *Schur-Eigenschaft* von $l^1(M)$ wird mittels des Phillips-Lemmas in bemerkenswert kurzer Form bewiesen werden. Schließlich beweisen wir auch die grundlegenden Verbandsisomorphien $l^1(M) \cong l^\infty(M)^*_c \cong \mathrm{ca}(M)$ bzw. $l^\infty(M)^* \cong \mathrm{ba}(M)$. Näheres folgt in den jeweiligen Abschnitten. Die verbandstheoretischen Grundlagen werden im Rahmen dieser Arbeit im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt. Als Referenzwerke dienen dabei [MN2], [S] und [AB]. Auf einige wichtige Begriffe gehen wir noch kurz ein.

Sofern nichts anderes gesagt wird, seien in dieser Arbeit E stets ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum und X ein Banachraum, jeweils über dem Körper $\mathbb{R}$. Wie üblich bezeichne X^* den Dualraum von X (bzgl. der Norm), $E^\sim$ das Ordnungsdual des Rieszraumes E, also die Menge aller regulären linearen Funktionale $\lambda : E \to \mathbb{R}$, die sich demnach in der Form $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ mit λ_1, λ_2 linear und ≥ 0 darstellen lassen. Ein reguläres Funktional $\lambda : E \to \mathbb{R}$ heißt *σ-ordnungs stetig,* wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

(i) Für jede Folge $(x_n)_1^\infty$ in E mit $o\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist $o\text{-}\lim_{n\to\infty}\langle\lambda, x_n\rangle = 0$.

(ii) Für jede Folge mit $E \ni x_n \downarrow 0$ ist $\lim_{n\to\infty}\langle\lambda, x_n\rangle = 0$.

Die Menge aller σ-ordnungs stetigen Funktionale in $E^\sim$ wird mit $E^\sim_c$ bezeichnet. Dann ist $E^\sim$ ein Dedekind vollständiger Rieszraum und $E^\sim_c$ ist ein Band in $E^\sim$. Ist E ein Banachverband, so ist $E^\sim = E^*$.

Wir wollen in dieser Arbeit (aus topologischen Gründen) stets voraussetzen, dass $E^\sim$ die Punkte von E trennt, in dem Sinne, dass zu jedem $x \in E\backslash\{0\}$ ein $\lambda \in E^\sim$ mit $\langle\lambda, x\rangle \neq 0$ existiert. Wir können dann E als Unterverband von $E^{\sim\sim}$ ansehen ([MN2], Prop. 1.4.5).

1.1 Schwache Topologien, starke Operatortopologie

Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung auf $X \times Y$.

Definition 1.1.1 $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *heißt ein Dualsystem, falls*

$$\forall x \in X\backslash\{0\}\ \exists y \in Y \ :\ \langle x, y\rangle \neq 0,$$
$$\forall y \in Y\backslash\{0\}\ \exists x \in X \ :\ \langle x, y\rangle \neq 0.$$

In dieser Situation lässt sich der Raum X (bzw. Y) stets mit einem punktetrennenden Unterraum des algebraischen Dualraums $Y^{\#}$ von Y (bzw. $X^{\#}$ von X) identifizieren, da die Abbildungen $X \ni x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$ bzw. $Y \ni y \mapsto \langle\cdot, y\rangle$ injektiv sind.

Für jedes $y \in Y$ betrachte man die zugehörige Halbnorm p_y auf X, definiert durch $p_y(x) = |\langle x, y\rangle|$, und setze $P = \{p_y \ :\ y \in Y\}$.

Definition 1.1.2 *Die von P auf X erzeugte lokalkonvexe Topologie heißt die von Y auf X erzeugte schwache Topologie und wird mit $\sigma(X, Y)$ bezeichnet.*

Bevor wir nun die für diese Arbeit grundlegenden schwachen Topologien einführen, fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Topologie $\sigma(X, Y)$ zusammen.

(i) $\sigma(X, Y)$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Elemente in $Y \subset X^{\#}$ stetig sind.

(ii) Die Mengen $\{x \in X \mid |\langle x, y_i\rangle| < \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, k\}$ mit $y_1, \ldots, y_k \in Y$ und $\varepsilon > 0$ bilden eine $\sigma(X, Y)$-Umgebungsbasis von 0.

(iii) Ein Netz (x_δ) in X konvergiert genau dann gegen 0 bzgl. $\sigma(X, Y)$, wenn $\langle x_\delta, y\rangle \to 0\ \forall\ y \in Y$ gilt.

(iv) Eine Folge (x_n) in X ist genau dann eine $\sigma(X, Y)$-Cauchyfolge, wenn für jedes $y \in Y$ auch $(\langle x_n, y\rangle)$ eine Cauchyfolge ist.

Ist nun X ein lokalkonvexer Hausdorffraum mit topologischem Dual X^*, so sind (X, X^*), (X^*, X) jeweils Dualsysteme bzgl. der durch $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$ bzw. $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$ definierten Abbildungen. Das führt direkt zur folgenden

Definition 1.1.3 *Sei X ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Dann heißt $\sigma(X, X^*)$ die schwache Topologie auf X und $\sigma(X^*, X)$ heißt die schwach* Topologie auf X^*.*

In der speziellen Situation eines normierten Raumes X trägt dieser also zwei natürliche Topologien: die Normtopologie sowie $\sigma(X, X^*)$, welche echt gröber als die Normtopologie ist, falls X unendlichdimensional ist. Der Dualraum

X^* trägt sogar drei natürliche Topologien: die (Operator-) Normtopologie, sowie $\sigma(X^*, X)$ und $\sigma(X^*, X^{**})$. Dabei ist $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \|\cdot\|$, wobei die letzte Inklusion echt ist, falls X unendlichdimensional ist und die erste Inklusion echt, falls X nicht reflexiv ist.

Abschließend führen wir eine Topologie auf dem Raum $\mathcal{L}(E, X)$ der stetigen linearen Operatoren eines lokalkonvexen Raumes E in einen normierten Raum X ein, die die schwach* Topologie $\sigma(E^*, E)$ als Topologie der punktweisen Konvergenz für stetige Funktionale auf Operatoren ausdehnt.

Definition 1.1.4 *Die von den Halbnormen p_x mit*

$$p_x(T) \;=\; \|Tx\| \qquad (x \in E)$$

auf $\mathcal{L}(E, X)$ erzeugte Topologie heißt die starke Operatortopologie und wird mit $L_s(E, X)$ bezeichnet.

$L_s(E, X)$ heißt auch die *Topologie der punktweisen Konvergenz*, da ein Netz (T_δ) in $\mathcal{L}(E, X)$ genau dann bzgl. $L_s(E, X)$ gegen 0 konvergiert, wenn $\|T_\delta x\| \to 0 \;\forall x \in E$ gilt. Insbesondere bilden die Mengen

$$\{T \in \mathcal{L}(E, X) | \|T_0 x_i - T x_i\| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots k\} \text{ mit } x_1, \ldots x_k \in E, \varepsilon > 0$$

eine Umgebungsbasis von $T_0 \in \mathcal{L}(E, X)$ bzgl. $L_s(E, X)$.

1.2 Die Folgenräume $l^p(M)$

Die im Hauptkapitel zunächst entwickelten Konstruktionen basieren auf Folgenräumen vom Typ $l^p(M)$ mit $M \subset \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$, die ganz ähnlich wie die klassischen l^p-Räume eingeführt werden. Nur müssen wir den üblichen Konvergenzbegriff durch den der unbedingten Summierbarkeit ersetzen. Wir folgen hier den Begriffen und Techniken aus dem Buch von Day [Da], Chapt.II, §2.
Zunächst seien M eine beliebige nicht-leere Indexmenge und $1 \leq p \leq \infty$. Dann sei

$$l^p(M) \;:=\; \begin{cases} \{x : M \to \mathbb{R} | \sum\limits_{m \in M} |x(m)|^p = \lim\limits_{\sigma \in \Sigma} \sum\limits_{m \in \sigma} |x(m)|^p \;< \infty\} & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \{x : M \to \mathbb{R} | \sup\limits_{m \in M} |x(m)| < \infty\} & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Dabei bezeichne Σ das System aller endlichen Teilmengen von M, welche wir mit der Inklusionsordnung „$\subset$“ versehen. Mit der punktweise definierten

Ordnung ist durch

$$\|x\|_p \ := \ \begin{cases} \left(\sum\limits_{m\in M} |x(m)|^p\right)^{1/p} & \text{falls } 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{m\in M} |x(m)| & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

für alle $x \in l^p(M)$ eine Verbandsnorm auf dem jeweiligen Raum definiert, in der $l^p(M)$ jeweils ein Dedekind vollständiger Banachverband ist.

In dieser Arbeit tritt die Menge M als (unendliche) Teilmenge von $\mathbb{N}$ auf. Dann können wir $l^p(M)$ als (abgeschlossenen) Unterverband des klassischen Raumes $l^p = l^p(\mathbb{N})$ ansehen: Die triviale Fortsetzung $\tau : l^p(M) \longrightarrow l^p$, definert durch

$$\tau(x) \ := \ (x_n)_1^\infty \text{ mit } x_n \ = \ \begin{cases} x(n) & \text{falls } n \in M, \\ 0 & \text{falls } n \notin M \end{cases}$$

für alle $x = (x(m))_{m\in M} \in l^p(M)$ ist ein isometrischer Verbandshomomorphismus.

Es folgt eine Verallgemeinerung der klassischen Dualraumidentifizierung $l^q = (l^p)^*$, wobei $1 \le p < \infty$ und $q = p(p-1)^{-1}$ mit $0^{-1} := \infty$ gelten soll. Dazu sind einige Vorbemerkungen nötig:

(i) Für jedes $m \in M$ ist durch $f_m(x) := x(m)\ \forall x \in l^p(M)$ ein Funktional $f_m \in l^p(M)^*$ mit $\|f_m\| = 1$ definiert.

(ii) Für eine endliche Linearkombination $f = \sum_{m\in\sigma} t_m f_m$ ist $f \in l^p(M)^*$.

(iii) Die Funktionalnorm ist gegeben durch $\|f\| = \left(\sum_{m\in\sigma} |t_m|^q\right)^{1/q}$ falls $p > 1$ (Höldersche Ungleichung!) und im Fall $p = 1$ durch $\|f\| = \sup_{m\in\sigma} |t_m|$.

Theorem 1.2.1 *Seien $1 \le p < \infty$, $q = p(p-1)^{-1}$ und M eine beliebige Menge. Dann ist durch $T : l^q(M) \longrightarrow l^p(M)^*$,*

$$Ty(x) \ := \ \sum_{m\in M} y(m)x(m) \ \forall y \in l^q(M) \forall x \in l^p(M)$$

ein isometrischer Verbandsisomorphismus gegeben.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $p > 1$, da der andere Fall ähnlich bewiesen werden kann. Für eine beliebige endliche Teilmenge σ von M betrachte man die Projektion $P_\sigma : l^p(M) \longrightarrow l^p(M)$,

$$P_\sigma x(m) \ := \ \begin{cases} x(m) & \text{falls } m \in \sigma, \\ 0 & \text{falls } m \notin \sigma \end{cases}$$

für alle $x \in l^p(M), m \in M$. Ist nun Σ mit der Inklusionsordnung versehen, so ist

$$\lim_{\sigma\in\Sigma} \|P_\sigma x - x\|_p^p \;=\; \lim_{\sigma\in\Sigma} \sum_{m\in M\setminus\sigma} |x(m)|^p \;=\; 0.$$

Ist $\delta^m \in l^p(M)$ definiert durch $\delta^m(m) = 1, \delta^m(r) = 0 \;\forall r \in M\setminus\{m\}$, so betrachte man den linearen Operator $U : l^p(M)^* \longrightarrow l^q(M)$, definiert durch $Uf(m) = f(\delta^m) \;\forall f \in l^p(M)^* \;\forall m \in M$. Tatsächlich bildet U in den angegebenen Raum ab. Für jedes $x \in l^p(M)$ und $\sigma \in \Sigma$ haben wir nämlich

$$P_\sigma^* f(x) = f(P_\sigma x) = \sum_{m\in\sigma} f(P_{\{m\}}x) = \sum_{m\in\sigma} f(x(m)\delta^m) = \sum_{m\in\sigma} Uf(m)f_m(x),$$

also

$$\|f\|^q \geq \|P_\sigma^* f\|^q = \sum_{m\in\sigma} |Uf(m)|^q$$

nach der Vorbemerkung (iii), was $Uf \in l^q(M)$ impliziert (siehe auch [Da], p.32). Insbesondere ist $\|U\| \leq 1$.

Andererseits bildet der lineare Operator T tatsächlich in den Raum $l^p(M)^*$ ab. Ist nämlich $y \in l^q(M)$ fixiert, dann gilt für alle $x \in l^p(M)$ mit $\|x\|_p \leq 1$:

$$|Ty(x)| = \lim_{\sigma\in\Sigma} \Big|\sum_{m\in\sigma} y(m)x(m)\Big| \leq \lim_{\sigma\in\Sigma} \Big(\sum_{m\in\sigma} |y(m)|^q\Big)^{1/q} \Big(\sum_{m\in\sigma} |x(m)|^p\Big)^{1/p} \leq \|y\|_q,$$

insbesondere $\|T\| \leq 1$.

Für diese Operatoren gilt $UT = I_{l^q(M)}$, also dass T injektiv ist. Die Surjektivität von T folgt sofort aus $TU = I_{l^p(M)^*}$, was man leicht nachrechnen kann:

$$(TU)f(x) = T(Uf)(x) = \sum_{m\in M} Uf(m)x(m) = \lim_{\sigma\in\Sigma} f(P_\sigma x) = f(\lim_{\sigma\in\Sigma} P_\sigma x) = f(x)$$

für alle $f \in l^p(M)^*$, $x \in l^p(M)$. In der Tat ist T isometrisch:

$$\|Ty\| \leq \|y\|_q = \|UTy\|_q \leq \|U\|\|Ty\| \leq \|Ty\| \;\forall y \in l^q(M).$$

Da beide Operatoren T, U positiv sind, ist T ein Verbandshomomorphismus ([AB], Theorem 7.3.). $\square$

Es folgen zwei für diese Arbeit zentrale Resultate, die die topologische, wie auch algebraische Sonderstellung des Unterverbandes $l^1(M) \subset l^1(M)^{**} = l^\infty(M)^*$ thematisieren. Zunächst zeigen wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, dass sich dieser Raum mit dem Raum $l^\infty(M)^*_c$ der (stetigen) σ-ordnungs stetigen Funktionale auf $l^\infty(M)$ identifizieren lässt.

Dafür sind einige Bezeichnungen nötig, die wir auch im Verlauf der Arbeit benutzen werden.

Bezeichnungen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $e^m \in l^\infty$ der m-te Einheitsvektor: $e^m := (\delta_{mn})_{n=1}^\infty$. Außerdem sei für jedes $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$

$$e^{M,m} \;:=\; (a_n)_{n=1}^\infty \text{ mit } a_n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M \text{ mit } n > m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich setzen wir $e^M := e^{M,0}$ für alle $M \subset \mathbb{N}$.

Satz 1.2.2 *Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$. Der Operator $T : l^1(M) \longrightarrow l^\infty(M)^*_c$,*

$$\left\langle T(a_n)_1^\infty, (b_m)_1^\infty \right\rangle \;:=\; \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$$

für alle $(a_n)_1^\infty \in l^1(M)$ und alle $(b_m)_1^\infty \in l^\infty(M)$ ist ein isometrischer Verbandsisomorphismus.

Beweis. Zunächst sei M eine unendliche Teilmenge, also $M = \{k(n) | n \in \mathbb{N}\}$. Wie im Beweis des letzten Theorems betrachte man den linearen Operator $U : l^\infty(M)^*_c \longrightarrow l^1(M)$, definiert durch $Uf := (\langle f, e^{k(m)} \rangle)_{m=1}^\infty$ für alle $f \in l^\infty(M)^*_c$. Tatsächlich bildet U in den Raum ab. Das folgt sofort aus der Tatsache, dass die Reihe $\sum \langle |f|, e^{k(m)} \rangle$ konvergiert. Wegen $\sum_{m=1}^k e^{k(m)} \uparrow e^M$ haben wir nämlich

$$\sum_{m=1}^k \langle |f|, e^{k(m)} \rangle \;=\; \left\langle |f|, \sum_{m=1}^k e^{k(m)} \right\rangle \longrightarrow \langle |f|, e^M \rangle \text{ für } k \to \infty.$$

Also ist $\|Uf\|_1 \leq \langle |f|, e^M \rangle \leq \|f\|$, insbesondere $\|U\| \leq 1$.

Außerdem ist $Tl^1(M) \subset l^\infty(M)^*_c$. Die Stetigkeit von $T(a_n)$ folgt sofort aus $|\langle T(a_n), (b_m) \rangle| \leq \|(a_n)\|_1 \|(b_m)\|_\infty$. Wir zeigen die σ-ordnungs Stetigkeit von $T(a_n)$. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ fixiert. Man betrachte eine Folge mit $(b_m) \downarrow 0$ in $l^\infty(M)$. Mit $b_m = (b_n(m))_{n=1}^\infty$ ist das gleichbedeutend mit

$b_n(m) \downarrow_m 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen jetzt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| b_i(1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Weiter seien $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\begin{array}{ll} |a_1|b_1(m) < \frac{\varepsilon}{2N} & \forall m \geq k_1, \\ \vdots & \vdots \\ |a_N|b_N(m) < \frac{\varepsilon}{2N} & \forall m \geq k_N. \end{array}$$

Dann folgt für alle $m \geq \max\{k_1, \ldots, k_N\}$:

$$\begin{aligned} |\langle T(a_n), b_m\rangle| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| b_i(m) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |a_i| b_i(m) + \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| b_i(1) \\ &< N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen lassen sich leicht verifizieren bzw. folgen ähnlich wie im letzten Theorem. Ist nun M eine endliche Teilmenge, etwa $M = \{k(1), \ldots, k(r)\}$, so definiere man den Operator U durch $Uf = (\langle f, \alpha_m\rangle)_{m=1}^{\infty}$ mit $\alpha_m := e^{k(m)}$ für $1 \leq m \leq r$ und $\alpha_m := \mathbf{0}$ falls $m > r$, wobei $\mathbf{0}$ die Nullfolge bezeichnet. Der Beweis verläuft dann analog. □

Die schwache Kompaktheit in einem normierten Raum X lässt sich mittels Folgen charakterisieren. So ist eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann relativ kompakt (kompakt) bzgl. $\sigma(X, X^*)$, wenn jede Folge in A eine schwach konvergente Teilfolge besitzt, für deren Limes $x \in X$ ($x \in A$) gilt (Satz von Eberlein-Šmulian, siehe [AB], Theorem 10.13). Bemerkenswert und für die Arbeit von entscheidender Bedeutung ist in diesem Zusammenhang, dass der Raum $l^1(M)$ die *Schur-Eigenschaft* besitzt: Die Kompaktheit in der schwachen Topologie ist äquivalent zur Norm-Kompaktheit. Wir zeigen dies mit einer zur üblichen maßtheoretisch formulierten Fassung äquivalenten Form von Phillips' Lemma (siehe auch [MN2], Theorem 2.5.19).

Dazu bemerken wir zunächst, dass der Dualraum $c_0(M)^*$ isometrisch verbandsisomorph zu $l^1(M)$ ist, wobei $c_0(M)$ die Menge aller Funktionen $f \in l^\infty(M)$ bezeichnet, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{m \in M | |x(m)| > \varepsilon\}$ endlich ist. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Theorem 1.2.1. Desweiteren seien Q_0 bzw. Q_1 die kanonischen Einbettungen von $c_0(M)$ bzw. $l^1(M)$ in ihr jeweiliges Bidual.

Theorem 1.2.3 (Phillips' Lemma) *Seien M eine beliebige Menge und (ψ_n) eine Folge in $c_0(M)^{***}$, so dass $\sigma(c_0(M)^{***}, c_0(M)^{**})$-$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0$ ist. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \|Q_0^* \psi_n\|_1 = 0$.*

Beweis. Siehe [Da], S.36. □

Theorem 1.2.4 (Schur) *Sei M eine beliebige Indexmenge. Dann ist jede relativ $\sigma(l^1(M), l^\infty(M))$-kompakte Teilmenge $A \subset l^1(M)$ relativ normkompakt (oder äquivalent: Jede schwach konvergente Folge in $l^1(M)$ ist normkonvergent).*

Beweis. Es sei $\sigma(l^1(M), l^1(M)^*)$-$\lim_{n\to\infty}(f_n - f) = 0$. Dann folgt sofort $\sigma(l^1(M)^{**}, l^1(M)^*)$-$\lim_{n\to\infty} Q_1(f_n - f) = 0$. Jetzt haben wir folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & c_0(M)^{***} \arrow[r, "Q_0^*"] \arrow[d, equal] & c_0(M)^* \arrow[d, equal] \\
l^1(M) \arrow[r, "Q_1"] \arrow[rr, bend right, "I_{l^1(M)}"'] & l^1(M)^{**} \arrow[r] & l^1(M)
\end{tikzcd}$$

Für alle $\varphi \in l^1(M)$ gilt:

$$(Q_0^* Q_1)(\varphi)x = Q_0^*(Q_1\varphi)x = Q_1\varphi(Q_0 x) = Q_0 x(\varphi) = \varphi(x)$$

für jedes $x \in c_0(M)$, also $Q_0^* Q_1 = I_{l^1(M)}$. Die Behauptung folgt dann aus Phillips' Lemma. □

1.3 Vektormaße und Operatoren

Neben gewissen linearen Operatoren spielen Vektormaße in dieser Arbeit eine entscheidende Rolle; vor allem auch daher, da wir sie in noch zu präzisierendem Sinne mit Klassen linearer Operatoren identifizieren können, was uns ermöglicht, (Kompaktheits-)Eigenschaften einer Struktur in die jeweils andere „hinüberzuziehen“. Wir entwickeln zunächst die allgemeine Theorie, betrachten also Mengenfunktionen mit Werten in einem (reellen) Banachraum X. Als Referenzwerke dienen uns [DU] und [DS].

Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum, also Ω eine nicht-leere Menge mit einer σ-Algebra Σ. Eine Abbildung $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ (oder $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$) heißt ein *(Vektor-)Maß*, wenn $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\forall A, B \in \Sigma$ disjunkt. Das Maß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ (oder $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$) heißt *$\sigma$-additiv*, falls $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ für jede disjunkte Folge (A_i) in Σ gilt, und es heißt *stark additiv*, wenn $\sum \mu(A_i)$ für jede disjunkte Folge $(A_i)_1^\infty$ in Σ bzgl. der Normtopologie konvergiert (diese Konvergenz ist unbedingt). Ist $\mu(\Sigma)$ in X beschränkt, so nennt man μ ein *beschränktes Maß*. Wir betrachten nun die Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathrm{ba}(\Sigma, X) &:= \{\mu : \Sigma \longrightarrow X |\ \mu \text{ beschränktes Maß}\}, \\ \mathrm{ca}(\Sigma, X) &:= \{\mu : \Sigma \longrightarrow X |\ \mu\ \sigma\text{-additives Maß}\}. \end{aligned}$$

In der Tat ist $\mathrm{ca}(\Sigma, X)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{ba}(\Sigma, X)$ ([DU], Chapt.I.1.).

Definition 1.3.1 *Sei $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ ein Maß.*

(a) *Die Funktion $|\mu| : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ mit*

$$|\mu|(A) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| \middle| n \in \mathbb{N},\ \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Sigma \textit{ Zerlegung von } A \right\}$$

für alle $A \in \Sigma$ heißt die Variation des Maßes μ.
Hierbei heißt $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ eine Zerlegung von A, wenn die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ (paarweise) disjunkt sind mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.
Falls $|\mu|(\Omega) < \infty$ gilt, so heißt μ ein Maß von beschränkter Variation.

(b) *Die Funktion $\|\mu\| : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ mit*

$$\|\mu\|(A) := \sup\{|x^*\mu|(A)|\ x^* \in \mathrm{ball}(X^*)\}$$

für alle $A \in \Sigma$ heißt die Semivariation des Maßes μ. Dabei sei $|x^*\mu|$ die Variation des reellwertigen Maßes $x^*\mu$ mit $x^*\mu(A) = \langle x^*, \mu(A)\rangle\ \forall A \in \Sigma$.
Gilt $\|\mu\|(\Omega) < \infty$, dann heißt μ ein Maß von beschränkter Semivariation.

Für ein Maß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ ist $|\mu|$ ebenfalls ein Maß und $\|\mu\|$ ist monoton und subadditiv. Jedes σ-additive Maß ist natürlich stark additiv. Für ein Maß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ ergeben sich folgende Implikationen:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mu \text{ ist beschränkt} & \Longleftrightarrow & \mu \text{ ist von beschränkter Semivariation} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \mu \text{ ist stark additiv} & \Longleftarrow & \mu \text{ ist von beschränkter Variation} \end{array}}$$

Im Falle $X = \mathbb{R}$ sind alle Aussagen äquivalent. Abschließend bemerken wir noch, dass $\mathrm{ba}(\Sigma, X)$ ein Banachraum in der Norm $\mu \mapsto \|\mu\|(\Omega)$ ist.

Bevor wir zu einem ersten Identifizierungssatz ([DU], Chapt.I.1., Theorem 13) kommen, führen wir ein vektorwertiges Integral auf dem (σ-Dedekind vollständigen M-) Raum $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ der reellwertigen Σ-messbaren beschränkten Funktionen auf $\Omega \neq \emptyset$ ein.
Dazu sei zunächst $\mathrm{St}(\Omega, \Sigma)$ der Raum der Σ-messbaren Stufenfunktionen auf Ω, also der Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die eine (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmte) Darstellung $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ besitzen. Für ein (zunächst) beliebiges Maß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ definieren wir dann $T_\mu : \mathrm{St}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ durch

$$T_\mu\Big(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}\Big) \ := \ \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Dieser Operator ist wohldefiniert und linear, so dass wir die Menge aller Vektormaße $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ mit dem Raum $L(\mathrm{St}(\Omega, \Sigma), X)$ identifizieren können.

Satz 1.3.2 *Ein Vektormaß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ ist genau dann beschränkt, wenn der zugehörige Operator $T = T_\mu$ stetig (beschränkt) ist. Es gilt dann* $\|\mu\|(\Omega) = \|T\|$.

Beweis. Zunächst sei $T = T_\mu$ stetig. Für alle $x^* \in \mathrm{ball}(X^*)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |x^*\mu|(\Omega) &= \sup\{\langle x^*, \mu(A)\rangle - \langle x^*, \mu(\Omega\backslash A)\rangle : \ A \in \Sigma\} \\ &= \sup\{\langle x^*, T_\mu(\chi_A - \chi_{\Omega\backslash A})\rangle : \ A \in \Sigma\} \\ &\leq \sup\{\langle x^*, T_\mu f\rangle : \ f \in \mathrm{ball}(\mathrm{St}(\Omega, \Sigma))\} \\ &\leq \|T_\mu\|. \end{aligned}$$

Somit ist μ von beschränkter Semivariation, also beschränkt und es gilt:

$$\|\mu\|(\Omega) \leq \|T_\mu\|.$$

Umgekehrt sei μ von beschränkter Semivariation. Ist dann $f \in \mathrm{ball}(\mathrm{St}(\Omega, \Sigma))$, so haben wir eine Darstellung $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ mit (paarweise) disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ und $|a_1|, \ldots, |a_n| \leq 1$. Für jedes $x^* \in \mathrm{ball}(\mathrm{St}(\Omega, \Sigma))$ ist dann

$$\begin{aligned} \langle x^*, T_\mu f\rangle \ &= \ \Big\langle x^*, \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)\Big\rangle \\ &\leq \ \sum_{i=1}^n |a_i| |\langle x^*, \mu(A_i)\rangle| \\ &\leq \ \sum_{i=1}^n |x^*\mu|(A_i) \ \leq \ \|\mu\|(\Omega). \end{aligned}$$

Aufgrund eines Hahn-Banach Theorems folgt $\|T_\mu f\| \leq \|\mu\|(\Omega)$, also die Stetigkeit von T_μ mit $\|T_\mu\| \leq \|\mu\|(\Omega)$. □

In dieser Situation lässt sich T_μ eindeutig zu einem stetigen linearen Operator $\hat{T}_\mu : \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ (mit gleicher Norm) fortsetzen, da $\mathrm{St}(\Omega, \Sigma)$ bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ dicht in $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ liegt. Es ist also $\hat{T}_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} T_\mu(f_n)$, falls $(f_n)_1^\infty$ eine Folge in $\mathrm{St}(\Omega, \Sigma)$ ist, für die $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ bei $n \to \infty$ gilt. Für ein beschränktes Maß μ können wir damit ein Integral definieren:

$$\int f \; d\mu \;:=\; \hat{T}_\mu(f) \quad \forall f \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma).$$

Umgekehrt ergibt sich zu jedem $T \in \mathcal{L}(\mathrm{B}(\Omega, \Sigma), X)$ durch $\nu(A) := T(\chi_A)$ ein beschränktes Maß $\nu : \Sigma \longrightarrow X$, so dass $\hat{T}_\nu = T$ ist. Insgesamt erhalten wir damit (siehe auch [DU], Chapt.I.1):

Theorem 1.3.3 *Sei* (Ω, Σ) *ein messbarer Raum. Dann ist durch* $\Psi : \mathrm{ba}(\Sigma, X) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{B}(\Omega, \Sigma), X)$ *mit*

$$\langle \Psi(\mu), f \rangle \;:=\; \int f \; d\mu$$

für alle $f \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ *ein isometrischer Isomorphismus* ($\|\Psi(\mu)\| = \|\mu\|(\Omega)$) *definiert.*

Es folgen jetzt die angekündigten Identifizierungen für die Banachverbände $l^\infty(M)^*$ und $l^\infty(M)^*_c = l^1(M)$, was der Situation $X = \mathbb{R}$ entspricht. In diesem Sinne definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{ba}(\Sigma) &:= \mathrm{ba}(\Sigma, \mathbb{R}), \\ \mathrm{ca}(\Sigma) &:= \mathrm{ca}(\Sigma, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

insbesondere für eine beliebige nicht-leere Menge M

$$\begin{aligned} \mathrm{ba}(M) &:= \mathrm{ba}(\wp(M)), \\ \mathrm{ca}(M) &:= \mathrm{ca}(\wp(M)), \end{aligned}$$

wobei $\wp(M)$ die Potenzmenge von M bezeichnet.

In der punktweise definierten Ordnung sind all diese Räume Dedekind vollständige Rieszräume, wobei

$$\begin{aligned} \nu \vee \mu(A) &= \sup\{\nu(B) + \mu(A \backslash B) | B \in \Sigma, B \subset A\}, \\ \nu \wedge \mu(A) &= \inf\{\nu(B) + \mu(A \backslash B) | B \in \Sigma, B \subset A\} \end{aligned}$$

für alle $A \in \Sigma$ und alle $\nu, \mu \in \mathrm{ba}(\Sigma)$ gilt. Durch $\|\mu\| = \|\mu\|(\Omega) = |\mu|(\Omega)$ wird $\mathrm{ba}(\Sigma)$ zu einem Banachverband, in dem $\mathrm{ca}(\Sigma)$ ein Band ist, insbesondere also abgeschlossen und damit selbst ein Banachverband.

Wir können in dieser Situation das Theorem 1.3.3 wesentlich einfacher beweisen, da $\|\mu\| = |\mu|$ bei $X = \mathbb{R}$ gilt. Wir erhalten sogar

Theorem 1.3.4 *Es sei* (Ω, Σ) *ein messbarer Raum. Dann ist durch* $\Psi : \mathrm{ba}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)^*$ *mit*

$$\langle \Psi(\mu), f) \ := \ \int f \ d\mu$$

für alle $f \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)^*$ *ein isometrischer Verbandsisomorphismus mit* $\|\Psi(\mu)\| = |\mu|(\Omega)$ *definiert. Die Restriktion* $\Psi|_{\mathrm{ca}(\Sigma)}$ *definiert einen isometrischen Verbandsisomorphismus zwischen den Räumen* $\mathrm{ca}(\Sigma)$ *und* $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)^*_c$.

Beweis. In der Tat ist durch $\Psi(\mu)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ erklärt, für dass $\|\Psi(\mu)\| \leq |\mu|(\Omega)$ gilt. Für alle $f \in \mathrm{St}(\Omega, \Sigma)$ ergibt sich nämlich sofort $| \int f \ d\mu \ | \leq \|f\|_\infty |\mu|(\Omega)$ und diese Abschätzung gilt damit auch (bei Grenzübergang) für alle $f \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$. Ist $\varepsilon > 0$ fixiert, so gibt es eine Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ von Ω, so dass gilt:

$$|\mu|(\Omega) < \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| + \varepsilon.$$

Definieren wir dann $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}\mu(A_i) \ \chi_{A_i}$, so ist $\|\varphi\| = 1$ und

$$\left\langle \Psi(\mu), \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \ > \ |\mu|(\Omega) - \varepsilon.$$

Also ist $\|\Psi(\mu)\| = |\mu|(\Omega)$. Natürlich ist Ψ surjektiv (siehe Vorbemerkungen zu Theorem 1.3.2). Da sowohl Ψ, als auch Ψ^{-1} positiv sind (man beachte, dass sich jedes $f \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_+$ sogar durch eine Folge in $\mathrm{St}(\Omega, \Sigma)_+$ approximieren lässt), ist Ψ ein Verbandshomomorphismus.

Ist dann $T \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)^*_c$ und (A_i) eine disjunkte Folge in Σ, so gilt für das zugehörige Maß μ wegen $\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} \uparrow \chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}$ dann

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) &= T\big(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}\big) \\
&= T\big(\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\big) \to T\big(\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}\big) = \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)
\end{aligned}$$

bei $n \to \infty$. Umgekehrt sei $\mu \in \mathrm{ca}(\Sigma)$, wobei wir o.B.d.A. $\mu \geq 0$ annehmen können (sonst Zerlegung in Positiv- und Negativteil). Dann ist $\Psi(\mu) \geq 0$. Wir betrachten jetzt eine Folge mit $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \ni f_n \downarrow 0$. Für fixiertes $\varepsilon > 0$ betrachte man die Mengen

$$A_n := \{t \in \Omega | f_n(t) \geq \varepsilon\} \in \Sigma$$

Dafür gilt $A_{n+1} \subset A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, also $\mu(A_n) \to 0$ bei $n \to \infty$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\langle \Psi(\mu), f_n \rangle &= \langle \Psi(\mu), f_n \chi_{A_n} \rangle + \langle \Psi(\mu), f_n \chi_{\Omega \setminus A_n} \rangle \\ &\leq \|f_n\|_\infty \mu(A_n) + \varepsilon \mu(\Omega \setminus A_n) \\ &\leq \|f_1\|_\infty \mu(A_n) + \varepsilon(\mu(\Omega) - \mu(A_n)),\end{aligned}$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \Psi(\mu), f_n \rangle \leq \varepsilon \mu(\Omega).$$

Da das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\langle \Psi(\mu), f_n \rangle \to 0$ bei $n \to \infty$. Jedenfalls ist $\Psi(\mu)$ sogar σ-ordnungsstetig. □

Korollar 1.3.5 *Für eine beliebige nicht-leere Menge M ist* $l^\infty(M)^* = \mathrm{ba}(M)$ *und* $l^\infty(M)^*_c = \mathrm{ca}(M)$.

Insbesondere können wir also den Folgenraum $l^1(M)$ mit $\mathrm{ca}(M)$ identifizieren, falls $M \subset \mathbb{N}$ ist. Das ist ein wesentlicher Aspekt in dieser Arbeit.

Im Sinne der angegebenen Identifizierungen lassen sich Eigenschaften des Maßes μ wie starke Additivität und σ-Addditivität durch gewisse Eigenschaften des Operators $\hat{T}_\mu$ charakterisieren, die wir zunächst allgemein definieren.

Definition 1.3.6 *Seien X, Y Banachräume und E ein archimedischer Rieszraum über $\mathbb{R}$.*

(a) *Ein linearer Operator $T : Y \longrightarrow X$ heißt schwach kompakt, wenn $T\mathrm{ball}(Y) \subset X$ relativ $\sigma(X, X^*)$-kompakt ist.*

(b) *Ein linearer Operator $T : E \longrightarrow X$ heißt ordnungs-schwach kompakt, wenn $T[0, x] \subset X$ relativ $\sigma(X, X^*)$-kompakt ist für alle $x \in E_+$.*

(c) *Ein linearer Operator $T : E \longrightarrow X$ heißt σ-ordnungs-norm stetig, falls $\|Tx_n\| \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede Folge $(x_n)_1^\infty \subset E$ mit $x_n \downarrow 0$ bei $n \to \infty$ gilt.*

Nach Eberlein-Šmulians Theorem ist $T : Y \longrightarrow X$ genau dann schwach kompakt, wenn für jede norm-beschränkte Folge $(y_n)_1^\infty$ in Y die Folge $(Ty_n)_1^\infty$ eine schwach konvergente Teilfolge in X besitzt. Die Menge aller schwach kompakten Operatoren von Y nach X bildet einen norm-abgeschlossenen Untervektorraum von $\mathcal{L}(Y, X)$. Nach einem Theorem von Gantmacher ([MN2], Cor. 3.5.5) ist $T : Y \longrightarrow X$ genau dann schwach kompakt, wenn der duale Operator $T^* : X^* \longrightarrow Y^*$ schwach kompakt ist. Ist E ein normierter Rieszraum, so ist ein schwach kompakter Operator $T : E \longrightarrow X$ wegen

$$T[0, x] \subset \|x\| T \text{ball}(E) \ \forall x \in E_+$$

ordnungs-schwach kompakt. Falls E ein M-Raum mit Ordnungseins ist, gilt auch die Umkehrung. Insbesondere ist der Operator $\hat{T}_\mu : \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ genau dann schwach kompakt, wenn er ordnungs-schwach kompakt ist, da $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ ein M-Raum mit Ordnungseins $\mathbf{1}$ ist, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion mit dem Wert 1 bezeichnet. Von entscheidender Bedeutung ist folgende Charakterisierung ordnungs-schwach kompakter Operatoren.

Theorem 1.3.7 (Dodds) *Seien E ein archimedischer Rieszraum, X ein Banachraum und $T : E \longrightarrow X$ ein intervall-beschränkter linearer Operator (d.h. $T[x, y] \subset X$ ist norm-beschränkt für alle $x, y \in E$ mit $x \leq y$).*
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *T ist ordnungs-schwach kompakt.*

(ii) *$q_T(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede ordnungs-beschränkte disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset E_+$.*

(iii) *$\|Tx_n\| \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede ordnungs-beschränkte disjunkte Folge$(x_n)_1^\infty \subset E_+$.*

(iv) *Die Folge $(Tx_n)_1^\infty \subset X$ ist konvergent für jede ordnungs-beschränkte monoton steigende Folge $(x_n)_1^\infty \subset E_+$.*

Für einen intervall-beschränkten linearen Operator $T : E \longrightarrow X$ sei dabei $q_T : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ die durch $q_T(x) = \sup\{\|Ty\| | y \in E, |y| \leq |x|\}$ definierte Verbandshalbnorm.

Beweis. [MN2], Theorem 3.4.4. □

Satz 1.3.8 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum, X ein Banachraum und $T : E \longrightarrow X$ linear und intervall-beschränkt. Dann ist T genau dann σ-ordnungs-norm stetig, wenn T ordnungs-schwach kompakt ist mit $T^\sim(X^*) \subset E_c^\sim$.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Mit T ist auch $T^{\sim}x^*$ intervall-beschränkt, also regulär. Ist dann $E \ni x_n \downarrow 0$, so ist $\|Tx_n\| \to 0$ bei $n \to \infty$ und damit $\langle T^{\sim}x^*, x_n\rangle = \langle x^*, Tx_n\rangle \to 0$ bei $n \to \infty$, also $T^{\sim}(X^*) \subset E_c^{\sim}$. Sei nun $(x_n)_1^\infty$ eine disjunkte Folge in E_+ mit $x_n \in [0,x]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann betrachte man die monoton wachsende Folge $(y_n)_1^\infty \subset E_+$ mit $y_n := \sum_{i=1}^n x_i = \bigvee_{i=1}^n x_i \leq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mit $y := \bigvee_{i=1}^\infty y_i \in E_+$ ergibt sich $\left\| \sum_{i=1}^n Tx_i - Ty \right\| = \|T(y - y_n)\| \to 0$ bei $n \to \infty$, so dass die Reihe $\sum Tx_n$ konvergent ist und damit $\|Tx_n\| \to 0$ bei $n \to \infty$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus dem Theorem von Dodds.

„$\Leftarrow$": Sei $(x_n)_1^\infty$ eine Folge in E mit $x_n \downarrow 0$. Dann ist $x_n \in [0,e]$ mit $e = x_1 \in E_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach [MN2], Prop. 1.2.13 ist durch $(E_e, \|\cdot\|_e)$ ein M-Raum mit e als Ordnungseins definiert. Insbesondere ist E_e ein Ideal in E. Da T ordnungs-schwach kompakt ist, ist die Restriktion $T_e := T|_{E_e} : E_e \longrightarrow X$ schwach kompakt. Dann ist

$$A_e := T_e^{\sim}(\mathrm{ball}(X^*)) = T^{\sim}(\mathrm{ball}(X^*))|_{E_e} \subset E_c^{\sim}|_{E_e} \subset (E_e)_c^{\sim} = (E_e)_c^*$$

(siehe auch Beweis zu Satz 2.3.13). Zu beliebig fixiertem $\varepsilon > 0$ gibt es nach [K], Satz 3.5 ein $y^* \in I(A_e)_+$, so dass $A_e \subset [-y^*, y^*] + \varepsilon\mathrm{ball}(E_e^*)$ ist. Für das von A_e in E_e^* erzeugte Ideal $I(A_e)$ gilt dann $I(A_e) \subset (E_e)_c^*$, also $y^* \in (E_e)_c^*$. Zu jedem $x^* \in A_e$ existieren nun $f_{x^*}, g_{x^*} \in E_e^*$ mit $|f_{x^*}| \leq y^*$ und $\|g_{x^*}\| \leq \varepsilon$, so dass $x^* = f_{x^*} + g_{x^*}$ gilt. Mit Hilfe von [MN2], Lemma 3.4.3 i) folgt dann (vgl. wieder Beweis zu 2.3.13):

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} q_T(x_n) &= \limsup_{n\to\infty} \rho_{A_e}(x_n) \\
&= \limsup_{n\to\infty}\ \sup\{\langle |x^*|, x_n\rangle | x^* \in A_e\} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}(\langle y^*, x_n\rangle + \varepsilon \underbrace{\|x_n\|_e}_{\leq 1}) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich $\|Tx_n\| \leq q_T(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$, was die σ-ordnungs Stetigkeit von T zeigt. $\square$

Theorem 1.3.9 *Es sei* (Ω, Σ) *ein messbarer Raum und* $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ *sei ein beschränktes Maß.*

(a) μ *ist genau dann stark additiv, wenn der zugehörige Operator* $\hat{T}_\mu : \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ *schwach kompakt (= ordnungs-schwach kompakt) ist.*

(b) μ *ist genau dann* σ*-additiv, wenn der zugehörige Operator* $\hat{T}_\mu : \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ σ*-ordnungs-norm stetig ist.*

Beweis. Wir beweisen zunächst (a).
„$\Rightarrow$": Es sei μ stark additiv. Ist dann $(f_n)_1^\infty \subset \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_+$ eine ordnungs-beschränkte (=beschränkte) disjunkte Folge, so gibt es ein $C > 0$ und eine

disjunkte Folge $(A_n)_1^\infty \subset \Sigma$, so dass $f_n \leq C\chi_{A_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt:

$$\|\hat{T}_\mu f_n\| \leq q_{\hat{T}_\mu}(f_n) \leq C q_{\hat{T}_\mu}(\chi_{A_n}) = C\|\mu\|(A_n) \to 0$$

bei $n \to \infty$ (siehe auch [MN2], 3.9.3). In der Tat gilt diese Konvergenz, da anderenfalls ein $\delta > 0$ existieren würde, so dass o.B.d.A. $\|\mu\|(A_n) > 2\delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen [DU], Chapt.I.1, Prop.11 ist dann

$$\sup\{\|\mu(B)\| | B \in \Sigma, B \subset A_n\} > \delta$$

für $n \in \mathbb{N}$, so dass eine Folge $(B_n)_1^\infty \subset \Sigma$ mit $B_n \subset A_n$ und $\|\mu(B_n)\| > \delta$ existieren würde. Diese ist also disjunkt. Da μ stark additiv ist, müsste $\|\mu(B_n)\| \to 0$ bei $n \to \infty$ gelten, ein Widerspruch. Die Implikation folgt dann aus dem Theorem von Dodds.

„$\Leftarrow$“: Angenommen μ ist nicht stark additiv. Dann gibt es eine disjunkte Folge $(A_n)_1^\infty \subset \Sigma$, so dass die Reihe $\sum \mu(A_n)$ nicht konvergiert. Damit existiert eine Folge $(k_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ mit $k_{j+1} > k_j$ $(j \in \mathbb{N})$ und ein $\delta > 0$, so dass

$$\Big\| \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} \mu(A_n) \Big\| > \delta$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge $(B_j)_1^\infty \subset \Sigma$ mit $B_j := \biguplus_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} A_n$ ist dann disjunkt mit $\|\mu(B_j)\| > \delta$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Damit ist auch die ordnungs-beschränkte Folge $(\chi_{B_j})_1^\infty$ in $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_+$ disjunkt, so dass aufgrund der Voraussetzung an $\hat{T}_\mu$ und des Theorems von Dodds der Widerspruch $\|\mu(B_j)\| = \|\hat{T}_\mu(\chi_{B_j})\| \to 0$ bei $n \to \infty$ folgt.

Es folgt der Beweis von (b). Hier ist nur „$\Rightarrow$“ zu beweisen.
Dazu sei μ ein σ-additives Maß und $(f_n)_1^\infty$ eine Folge in $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ mit $f_n \downarrow 0$ bei $n \to \infty$. Für ein beliebig fixiertes $\varepsilon > 0$ betrachte man die Mengen A_n, so wie sie im Beweis zu 1.3.4 eingeführt worden sind. Dann folgt

$$\begin{aligned}
q_{\hat{T}_\mu}(f_n) &\leq q_{\hat{T}_\mu}(f_n\chi_{A_n}) + q_{\hat{T}_\mu}(f_n\chi_{\Omega\setminus A_n}) \\
&\leq q_{\hat{T}_\mu}(\|f_n\|_\infty\chi_{A_n}) + q_{\hat{T}_\mu}(\varepsilon\chi_{\Omega\setminus A_n}) \\
&\leq \|f_1\|_\infty\|\mu\|(A_n) + \varepsilon\|\mu\|(\Omega), \text{ also} \\
\limsup_{n\to\infty} q_{\hat{T}_\mu}(f_n) &\leq \varepsilon\|\mu\|(\Omega),
\end{aligned}$$

und damit in der Tat $\|\hat{T}_\mu f_n\| \leq q_{\hat{T}_\mu}(f_n) \to 0$ bei $n \to \infty$, da $\|\mu\|(A_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ gilt: Da Σ eine σ-Algebra ist, ist μ sogar stark additiv und die

Konvergenz folgt aus den Betrachtungen in Teil (a). □

Für ein späteres Resultat des dritten Kapitels ist es von Bedeutung, dass sich ein ordnungs-schwach kompakter Operator $T : E \longrightarrow X$ über einen Banachverband mit ordnungsstetiger Norm faktorisieren lässt ([MN2], Theorem 3.4.6, siehe auch [K]). Genauer gilt:

Theorem 1.3.10 (Faktorisierung) *Sei $T : E \longrightarrow X$ ein ordnungs-schwach kompakter Operator. Dann existieren ein Banachverband F mit ordnungsstetiger Norm, ein ordnungs-schwach kompakter positiver Operator $Q : E \longrightarrow F$ und ein linearer Operator $S : F \longrightarrow X$ mit $\|S\| \leq 1$, so dass $T = SQ$ gilt.*

Beweis. Zunächst beachte man, dass T als ordnungs-schwach kompakter Operator intervall-beschränkt ist: Relativ schwach kompakte Mengen in X sind norm-beschränkt. Da q_T eine Verbandshalbnorm auf E ist, ist $N = N(T) := \{f \in E | q_T(f) = 0\}$ ein (Ordnungs-)Ideal in E. Dann ist der Quotientenraum E/N ein Rieszraum in der Ordnung

$$Qf \leq Qg \;:\Longleftrightarrow\; Q(g - f) \in Q(E_+),$$

wobei $Q : E \longrightarrow E/N$ die Quotientenabbildung bezeichnet. Q ist sogar ein Verbandshomomorphismus, insbesondere positiv ([MN2], Prop. 1.3.13). Durch $\|Qf\| := q_T(f) \ \forall f \in E$ ist eine Verbandsnorm auf E/N gegeben. Sei dann F die Vervollständigung von E/N in dieser Norm. Dann ist F ein Banachverband ([AB], Theorem 12.2). Als Operator $Q : E \longrightarrow E/N \subset F$ ist Q ordnungs-schwach kompakt: Ist $(f_n)_1^\infty$ eine ordnungs-beschränkte disjunkte Folge in E_+, so ist $\|Qf_n\| = q_T(f_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ wegen des Theorems von Dodds. Der lineare Operator $R : E/N \longrightarrow X,\ RQf := Tf \ \forall Qf \in E/N$ ist wohldefiniert, da $N \subset \mathrm{kern}(T)$ gilt. Wegen

$$\|RQf\| = \|Tf\| \leq q_T(f) = \|Qf\| \ \forall Qf \in E/N$$

ist R stetig mit $\|R\| \leq 1$. Da E/N dicht in F liegt, existiert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $S : F \longrightarrow X$ von R mit $\|S\| \leq 1$. Nach Konstruktion gilt $T = SQ$.

Die Ordnungsstetigkeit der Norm auf F ergibt sich, indem wir zeigen, dass jedes Ordnungsintervall in F schwach kompakt ist (siehe [MN2], Theorem 2.4.2). Dazu gehen wir o.B.d.A. von einem beliebigen Intervall $[0, g] \subset F$ mit $g \in F_+$ aus. Diese Menge ist konvex und normabgeschlossen, aufgrund eines Hahn-Banach Theorems also auch schwach abgeschlossen. Im Hinblick auf ein

Lemma von Grothendieck ([MN2], Lemma 3.5.1) sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Da $Q(E) \subset F$ dicht ist, gibt es eine Folge $(g_n)_1^\infty \subset Q(E)$ mit $g_n \to g,\ n \to \infty$, so dass auch $g_n^+ \to g^+ = g$ bei $n \to \infty$ folgt. Daher gibt es ein $g_\varepsilon \in Q(E)_+$ mit $\|g - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Für ein beliebiges $f \in [0, g]$ ist

$$\begin{aligned} |g - g_\varepsilon| &= g \vee g_\varepsilon - g \wedge g_\varepsilon \\ &\geq g - g \wedge g_\varepsilon \\ &= g + (f - g) - ((g \wedge g_\varepsilon) + (f - g)) \\ &= f - f \wedge (g_\varepsilon + (f - g)) \\ &\geq f - \underbrace{f \wedge g_\varepsilon}_{\in [0, g_\varepsilon]} \geq 0, \end{aligned}$$

so dass wegen $\|f - f \wedge g_\varepsilon\| \leq \|g - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ folgt:

$$[0, g] \subset [0, g_\varepsilon] + \varepsilon \text{ball}(F).$$

Wir zeigen noch, dass $[0, g_\varepsilon]$ schwach kompakt ist. Dazu sei $h \in E_+$ mit $g_\varepsilon = Qh$. Dann ist

$$[0, g_\varepsilon] = [0, Qh] \overset{(*)}{=} \overline{Q[0, h]}^{\|\cdot\|} \subset \overline{Q[0, h]}^{\sigma(F, F^*)},$$

wobei die Obermenge schwach kompakt ist, das erste Ordnungsintervall also relativ $\sigma(F, F^*)$-kompakt. Dabei ergibt sich $(*)$ aus folgender Überlegung: Einerseits ist $Q[0, h] \subset [0, Qh]_{Q(E)}$, da Q positiv ist. Andererseits gibt es zu einem beliebigen $f \in [0, Qh]_{Q(E)}$ ein $v \in E$ mit $f = Qv$, so dass

$$Q(v^+ \wedge h) = (Qv)^+ \wedge Qh = f \wedge Qh = f$$

mit $v^+ \wedge h \in [0, h]$ folgt, womit auch $[0, Qh]_{Q(E)} \subset Q[0, h]$ ist. Jedenfalls ist dann

$$\overline{Q[0, h]}^{\|\cdot\|} = \overline{[0, Qh]_{Q(E)}}^{\|\cdot\|} = [0, Qh] = [0, Qh]_F$$

aufgrund der Dichtheitsvoraussetzung.

Als (konvexes und normabgeschlossenes) Ordnungsintervall ist $[0, g_\varepsilon]$ schwach abgeschlossen, also sogar schwach kompakt. Aus besagtem Lemma folgt die schwache Kompaktheit von $[0, g]$. □

2 Schwache Kompaktheit in Dualräumen

Charakterisierungen (relativer) schwacher Kompaktheit in Dualräumen E^* hängen maßgeblich von den verbandstheoretischen Eigenschaften des Raumes E ab. Ist etwa E ein M-Raum mit Ordnungseins, so ist E^* ein L-Raum und es gelten die Sätze von Dunford-Pettis und Grothendieck ([MN2], Theorem 2.5.4 bzw. 2.5.5). Hier wird eine (relativ) $\sigma(E^*, E^{**})$-kompakte Teilmenge von E^* dadurch charakterisiert, dass sie fast ordnungs-beschränkt bzw. gleichmäßig stark additiv ist. In dieser Arbeit wollen wir nun auch die schwach* Topologie $\sigma(E^*, E)$ ins Spiel bringen und ein Ziel soll sein, diese Charakterisierungen auch für schwach* folgen präkompakte Teilmengen von E^* angeben zu können. Damit hätten wir die schwach* folgen Präkompaktheit sowohl geometrisch (fast ordnungs-beschränkt) als auch mittels disjunkter Folgen (gleichmäßig stark additiv) beschrieben. Der Raum E muss dazu ein wenig eingeschränkt werden, so dass er ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins wird. Zum einen erhalten wir damit Verallgemeinerungen der Resultate von Schaefer und Zhang [Zh], [SZ1], [SZ2], [SZ3] (siehe Abschnitt 2.3), zum anderen werden wir damit zeigen können, dass unter gewissen Voraussetzungen an E $\sigma(E^*, E)$-Kompaktheit sogar Norm-Kompaktheit impliziert, wenn man sich nur auf einen geeigneten Unterverband $V \subset E$ einschränkt, der zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorph ist. Dementsprechend müssen die angesprochenen Charakterisierungen der schwach* folgen Präkompaktheit durch eine weitere die Einbettbarkeit von $l^\infty(M)$ in E betreffende Charakterisierung ergänzt werden. Ähnliche Kompaktheitsresultate in allerdings etwas allgemeinerem Rahmen finden sich auch in den Arbeiten von P.G.Dodds und O.Burkinshaw [BD1], [BD2] sowie [Do1], [Do2].

2.1 Verbandseinbettbarkeit von $l^\infty(M)$ in einen σ-Dedekind vollständigen Banachverband

Die Resultate der nächsten Abschnitte werden zeigen, dass die Verbandsisomorphie eines Unterverbandes eines σ-Dedekind vollständigen Banachverbandes zu $l^\infty(M)$ mit $M \subset \mathbb{N}$ eine entscheidende Rolle spielt. Daher untersuchen wir zunächst, unter welchen Voraussetzungen eine solche „Einbettbarkeit“ von $l^\infty(M)$ überhaupt möglich ist. Dabei zeigen wir ein Konstruktionsprinzip, welches aus gewissen ordnungs-beschränkten disjunkten Folgen in E_+ den zu $l^\infty(M)$ isomorphen Unterverband von E gleichsam „erzeugt“. Zuallererst präzisieren wir die Begriffe:

Definition 2.1.1 *Seien E, F (reelle) Banachverbände. Dann heißt E verbandseinbettbar in F, wenn es einen Verbandshomomorphismus $T : E \longrightarrow F$*

derart gibt, dass Konstanten $m, M > 0$ existieren, so dass gilt:

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \;\forall x \in E.$$

In dieser Situation heißt T eine Verbandseinbettung.

In der Tat folgt aus beiden Ungleichungen, dass $T(E)$ ein *abgeschlossener* Unterverband (also selbst ein Banachverband) von F ist, den wir aufgrund der ersten Ungleichung mit E *identifizieren* können.

Wir folgen den Begrifflichkeiten und Sätzen in [AB], Chap.4, Sec.14. Dort wird auch die Einbettbarkeit von c_0 behandelt. Wir benötigen hier ein Resultat für l^∞.

Theorem 2.1.2 (Lozanovskii–Mekler–Meyer-Nieberg) *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband. Dann sind äquivalent:*

(i) $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$ *ist verbandseinbettbar in E.*

(ii) *Die Norm auf E ist nicht ordnungs stetig.*

(iii) *Es existiert eine ordnungs-beschränkte disjunkte Folge in E_+, die nicht in der Norm gegen 0 konvergiert.*

Beweis. [AB], Theorem 14.4. Siehe auch [MN2], Cor. 2.4.3. □

Die Beweisimplikation (iii)⇒(i) liefert dabei ein Verfahren, welches aus einer ordnungs-beschränkten disjunkten Folge in E_+, deren Glieder in der Norm nach unten „positiv beschränkt“ sind, eine Verbandseinbettung erzeugt (s. auch [MN], Lemma 2.3.10). Genauer gilt folgendes:

Satz 2.1.3 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband und $M \subset \mathbb{N}$ eine beliebige nicht-leere Menge. Existiert dann eine ordnungs-beschränkte disjunkte Familie $\{x_n | n \in M\} \subset E_+$, so dass $\inf\{\|x_n\| \; | n \in M\} > 0$ gilt, so ist $l^\infty(M)$ verbandseinbettbar in E.*

Beweis. Es sei $\{x_n | n \in M\}$ eine disjunkte Familie mit $\|x_n\| \geq K$ und $0 \leq x_n \leq x$ für alle $n \in M$ mit $K > 0$ und einem $x \in E_+$. Bezeichne dann $\{\widetilde{x}_n | n \in \mathbb{N}\}$ die triviale Fortsetzung der Familie. Für ein fixiertes $(a_n)_1^\infty \in l^\infty(M)_+$ haben wir dann $0 \leq \sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i \uparrow\leq \|(a_n)_1^\infty\|_\infty x$, so dass die Reihe $\sum a_i\widetilde{x}_i$ aufgrund der σ-Dedekind Vollständigkeit von E ein Supremum in E besitzt. Daher können wir eine Abbildung $q : l^\infty(M)_+ \longrightarrow E_+$ wie folgt definieren:

$$q(a_n)_1^\infty := \bigvee_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i\widetilde{x}_i = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=1}^{n} a_i\widetilde{x}_i = \bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{x}_n = \bigvee_{n\in M} a_n x_n$$

für alle $(a_n)_1^\infty \in l^\infty(M)_+$.

Wegen

$$\begin{aligned} q(a_n+b_n)_1^\infty \uparrow &\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)\widetilde{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i + \sum_{i=1}^n b_i\widetilde{x}_i \ \uparrow q(a_n)_1^\infty + q(b_n)_1^\infty \text{ bei } n \to \infty \end{aligned}$$

für alle $(a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty \in l^\infty(M)_+$, ist q additiv. Trivialerweise ist q auch positiv homogen. Dann sei $\widehat{q} : l^\infty(M) \longrightarrow E$ die eindeutig bestimmte (positive) lineare Fortsetzung von q. Man beachte, dass hierfür die Additivität ausreicht, da E als σ-Dedekind vollständiger Rieszraum archimedisch ist ([AB], Theorem 1.7).

Zum einen ist $\widehat{q}$ ein Verbandshomomorphismus. Dazu seien $(a_n)_1^\infty, (b_n)_1^\infty \in l^\infty(M)$ mit $(a_n)_1^\infty \wedge (b_n)_1^\infty = (a_n \wedge b_n)_1^\infty = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{q}(a_n)_1^\infty \wedge \widehat{q}(b_n)_1^\infty &= \Big(\bigvee_{n=1}^\infty a_n\widetilde{x}_n\Big) \wedge \Big(\bigvee_{m=1}^\infty b_m\widetilde{x}_m\Big) \\ &= \bigvee_{n=1}^\infty \bigvee_{m=1}^\infty (a_n\widetilde{x}_n \wedge b_m\widetilde{x}_m) \\ &= \bigvee_{n=1}^\infty \underbrace{(a_n \wedge b_n)}_{=0}\widetilde{x}_n = 0, \end{aligned}$$

da $a_n\widetilde{x}_n \wedge b_m\widetilde{x}_m = 0\ \forall n \neq m$ ist. Die Behauptung folgt dann etwa mit [AB], Theorem 7.2.

Desweiteren erfüllt $\widehat{q}$ die in der Definition angegebene Äquivalenzbedingung. Für ein fixiertes $a = (a_n)_1^\infty \in l^\infty(M)$ gilt

$$K|a_n| \leq |a_n|\ \|x_n\| \leq \|\widehat{q}|a|\| \leq \|x\|\ \|a\|_\infty$$

für alle $n \in M$ und damit wegen $\widehat{q}|a| = |\widehat{q}a|$ dann

$$K\|a\|_\infty \leq \|\widehat{q}a\| \leq \|x\|\ \|a\|_\infty$$

für alle $a \in l^\infty(M)$. $\square$

Abschließend betrachten wir eine Realisierung dieser Situation, wie sie in einigen Beweisen des übernächsten Abschnitts auftritt. Für einen archimedischen Rieszraum E sei $\emptyset \neq A \subset E^\sim$. Dann betrachte man die zugehörige Abbildung ρ_A mit

$$\rho_A(x) := \sup\{\langle |x^*|, |x| \rangle \ |x^* \in A\} \in [0, \infty]$$

für alle $x \in E$. Falls für einen Banachverband E dann $A \subset E^*$ beschränkt ist (oder allgemeiner: Falls E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum und A $\sigma(E^\sim, E)$-beschränkt ist, so dass $\rho_A(x) < \infty \; \forall x \in E$ gilt, siehe [MN2], p. 81), so ist durch $\rho_A : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine absolut monotone Halbnorm definiert.

Korollar 2.1.4 (Erzeugungsprinzip) *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband, $\emptyset \neq A \subset E^\sim(= E^*)$ beschränkt und $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$. Ist dann $\{x_n^* | n \in M\} \subset A$ und ist $\{y_n | n \in M\}$ eine ordnungs-beschränkte disjunkte Familie in E_+, so dass $|\langle x_n^*, y_n \rangle| > r \; \forall n \in M$ für ein $r > 0$ gilt (etwa wenn $\rho_A(x_n) > 2r \; \forall n \in M$ für eine ordnungs-beschränkte disjunkte Familie $\{x_n | n \in M\} \subset E_+$ ist), so ist $l^\infty(M)$ verbandseinbettbar in E.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $C > 0$, so dass gilt:

$$r < \langle |x_n^*|, y_n \rangle \leq \|x_n^*\| \|y_n\| \leq C \|y_n\|,$$

also $\|y_n\| \geq rC^{-1}$ für alle $n \in M$. Die Behauptung folgt dann aus dem vorangegangenen Satz. $\square$

Bemerkung. In dieser Situation sprechen wir dann häufig *von dem aus $\{y_n | n \in M\}$ erzeugten zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorphen Unterverband von E.*

2.2 Restriktion σ-ordnungs stetiger Funktionale

Wir stellen in diesem Abschnitt einige Hilfssätze bereit, die wir in den folgenden Abschnitten benötigen. Zunächst zeigen wir ein für diese Arbeit besonders wichtiges Resultat: Jedes positive Funktional in $(l^\infty)^*$ ist sogar „lokal σ-ordnungs stetig“. Wir geben dafür zunächst eine auf Rosenthal's Lemma ([MN2], Lemma 2.3.7) basierende Beweiskonstruktion an. Die für dieses Lemma erforderlichen Konstruktionen sind allerdings relativ kompliziert, so dass wir im Anschluss einen einfacheren direkten Beweis zeigen werden.

Ausgehend von der konstanten Folge $(\lambda)_1^\infty \subset (l^\infty)_+^\sim$ und der Folge $(e^n)_1^\infty \subset l_+^\infty$ mit $\sum_{i=1}^n e^i \leq (1)_1^\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wenden wir nacheinander Rosenthal's Lemma auf verbleibende Teilfolgen an. Zunächst sei $M(0) := \mathbb{N}$.

$$\exists (k^1(n))_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N} : \quad \Big\langle \lambda, \overbrace{\sum_{j \neq 1} e^{k^1(j)}}^{=e^{M(1)}} \Big\rangle < 2^{-1},$$
$$\text{mit } M(1) := \{k^1(j) | j \in \mathbb{N}, j \neq 1\}, \; k(1) := k^1(1);$$

$$\exists (k^2(n))_{n=1}^\infty \subset (k^1(n))_{n=2}^\infty : \quad \Big\langle \lambda, \overbrace{\sum_{j\neq 1} e^{k^2(j)}}^{=e^{M(2)}} \Big\rangle < 2^{-2},$$

$$\text{mit } M(2) := \{k^2(j) | j \in \mathbb{N}, j \neq 1\} \subset M(1),\ k(2) := k^2(1) \geq k^1(2) > k(1);$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\exists (k^r(n))_{n=1}^\infty \subset (k^{r-1}(n))_{n=2}^\infty : \quad \Big\langle \lambda, \overbrace{\sum_{j\neq 1} e^{k^r(j)}}^{=e^{M(r)}} \Big\rangle < 2^{-r},$$

$$\begin{aligned}\text{mit } M(r) := \{k^r(j) | j \in \mathbb{N}, j \neq 1\} \subset M(r-1),\ k(r) &:= k^r(1) \geq k^{r-1}(2) \\ &> k^{r-1}(1) = k(r-1) \quad (r \geq 3).\end{aligned}$$

Die hierbei auftretenden Summenausdrücke sind jeweils als Supremum aller endlichen Teilsummen definiert. Offensichtlich gilt für die streng monoton wachsende Folge $(k(n))_{n=1}^\infty$: $k(r) \in M(r-1)\backslash M(r)\ \forall r \in \mathbb{N}$. Dann zeigt man (siehe folgender Beweis), dass für $M := \{k(n) | n \in \mathbb{N}\}$ gilt: $\lambda|_{l^\infty(M)} \in l^\infty(M)_c^*$. Damit ergibt sich folgendes

Lemma 2.2.1 *Es sei $0 \neq \lambda$ ein positives lineares Funktional auf l^∞, also $\lambda \in \mathrm{ba}(\mathbb{N})_+$. Dann existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass die Restriktion $\lambda|_{l^\infty(M)}$ σ-ordnungs stetig ist, also $\lambda|_{l^\infty(M)} \in l^1(M)$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

1.Schritt: (Alternative) Konstruktion der unendlichen Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$.

Wir starten die Konstruktion mit $M(0) := \mathbb{N}$. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ nehmen wir an, dass unendliche Teilmengen

$$M(0) \supset M(1) \supset \ldots \supset M(n) \quad \text{und} \quad k(1) < \ldots < k(n) \in \mathbb{N}$$

existieren, so dass gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \langle \lambda, e^{M(r)} \rangle \leq 2^{-r} \\ k(r) \in M(r-1)\backslash M(r) \end{array}\right\} \text{ für alle } r = 1, \ldots, n$$

(siehe Bezeichnungen im 1.Kapitel). Um diesen induktiven Prozess zu beenden, haben wir eine unendliche Teilmenge $M(n+1) \subset M(n)$ und ein $\mathbb{N} \ni k(n+1) > k(n)$ zu bestimmen, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wir wählen ein beliebiges $m \in M(n)$, so dass $m > k(n)$

gilt. Dann setzen wir $k(n+1) := m$. Nun sei $(A(r))_{r=1}^{\infty}$ eine Folge unendlicher disjunkter Teilmengen von $M(n)\backslash\{m\}$. Diese Folge lässt sich etwa durch „sukzessive Ausdünnung“ rekursiv wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned}
A(1) &:= \{\varphi^1(2j)|\varphi^1 : \mathbb{N} \longrightarrow M(n)\backslash\{m\} \text{ bijektiv}, \ j \in \mathbb{N}\},\\
A(2) &:= \{\varphi^2(2j)|\varphi^2 : \mathbb{N} \longrightarrow (M(n)\backslash\{m\})\backslash A(1) \text{ bijektiv}, \ j \in \mathbb{N}\},\\
A(3) &:= \{\varphi^3(2j)|\varphi^3 : \mathbb{N} \longrightarrow ((M(n)\backslash\{m\})\backslash A(1))\backslash A(2)\\
&\qquad\qquad = (M(n)\backslash\{m\})\backslash(A(1) \cup A(2)) \text{ bijektiv}, \ j \in \mathbb{N}\},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
A(r) &:= \{\varphi^r(2j)|\varphi^r : \mathbb{N} \longrightarrow (M(n)\backslash\{m\})\backslash\big(\bigcup_{s=1}^{r-1} A(s)\big) \text{ bijektiv}, \ j \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

für $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 4$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
e^{M(n)} &\geq e^{A(1)\cup\ldots\cup A(r)}\\
&= e^{A(1)} + \ldots e^{A(r)},
\end{aligned}$$

also

$$\langle\lambda, e^{M(n)}\rangle \geq \langle\lambda, e^{A(1)}\rangle + \ldots \langle\lambda, e^{A(r)}\rangle \ \forall r \in \mathbb{N},$$

so dass die (monoton wachsende) Reihe $\sum\langle\lambda, e^{A(n)}\rangle$ konvergent ist. Die Reihenglieder bilden also eine Nullfolge, so dass ein $r \in \mathbb{N}$ existiert mit $\langle\lambda, e^{A(r)}\rangle < 2^{-(n+1)}$. Jetzt sei $M(n+1) := A(r)$. Dann gilt natürlich $M(n+1) \subset M(n)$, $k(n+1) \in M(n)\backslash M(n+1)$ und $\langle\lambda, e^{M(n+1)}\rangle \leq 2^{-(n+1)}$. Damit ist die induktive Konstruktion beendet.

Jetzt sei $M := \{k(n)|n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $M \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge.

2.Schritt: Wir zeigen, dass $\lambda|_{l^\infty(M)}$ σ-ordnungs stetig ist.

Dazu sei $(f_m)_{m=1}^{\infty} \subset l^\infty(M)$ eine beliebige Folge mit $f_m \geq f_{m+1} \downarrow 0$ in der Ordnung bei $n \to \infty$. Wir können sofort $e^M \geq f_1$ annehmen, anderenfalls betrachte man statt der ursprünglichen Folge die Folge $(f_m\|f_1\|_\infty^{-1})_{m=1}^{\infty}$ mit $f_1 \neq 0$. Jedes f_m hat eine Darstellung $f_m = (a_n(m))_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n(m) = 0$ für alle $n \notin M$. Wegen $f_m \downarrow 0$ bei $m \to \infty$ haben wir dann $a_n(m) \downarrow 0$ bei $m \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$ und wählen ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $2^{1-r} < \varepsilon$ ist. Weiter sei $p \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$a_{k(1)}(m), \ldots a_{k(r)}(m) \leq \delta := \frac{\varepsilon}{2(1 + \langle\lambda, e^M\rangle)}$$

für alle $m \geq p$ gilt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} f_m &\leq \delta e^{k(1)} + \ldots + \delta e^{k(r)} + e^{M,k(r)} \\ &\leq \delta e^M + e^{M(r)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \langle \lambda, f_m \rangle &\leq \delta \langle \lambda, e^M \rangle + \langle \lambda, e^{M(r)} \rangle \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-r} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m \geq p$, womit alles gezeigt wäre. Schließlich ist $\lambda|_{l^\infty(M)} \in l^1(M)$ wegen Satz 1.2.2. □

Ist E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband, so ist die Restriktion eines Funktionals $\lambda \in E_c^\sim = E_c^*$ auf einen beliebigen Unterverband $V \subset E$ im allgemeinen nicht mehr σ-ordnungs stetig, wie das nachfolgende Beispiel zeigt. Eine diesbzgl. positive Antwort erhält man, wenn V verbandsisomorph zu l^∞ ist. Sofern die Norm auf E nicht ordnungs stetig ist, existiert auch stets ein solcher abgeschlossener Unterverband (Theorem 2.1.2). Ist dies umgekehrt der Fall, so kann die Norm auf E nicht ordnungs stetig sein, da anderenfalls auch die Norm auf dem abgeschlossenen Unterverband $V \cong l^\infty$ ordnungs stetig sein müsste. Die Supremumsnorm auf l^∞ ist aber nicht ordnungs stetig.

Beispiel. Wir erinnern zunächst daran, dass eine Folge $(f_n)_1^\infty$ in $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ genau dann in der Ordnung gegen 0 konvergiert, wenn es eine monoton fallende Folge $(g_n)_1^\infty \subset \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_+$ gibt, so dass $g_n(\omega) \to 0,\ n \to \infty$ für alle $\omega \in \Omega$ und $|f_n| \leq g_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere sind also die (stetigen) Dirac-Funktionale δ_ω für alle $\omega \in \Omega$ sogar σ-ordnungs stetig (aber nicht notwendig ordnungs stetig). Dies zeigt, dass $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_c^*$ ein nicht-trivialer Unterverband ist, der die Punkte von $\mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$ trennt.

Nun betrachte man den abgeschlossenen Unterverband $C[0,2] \subset B[0,2]$, wobei $B[0,2]$ ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins ist. Für die Folge $(f_n)_1^\infty \subset C[0,2]$ mit $f_n(t) := \min\{t^n, (2-t)^n\}\ \forall 0 \leq t \leq 2$ (siehe Abb.1) gilt dann

$$f_n \downarrow \chi_{\{1\}},\ n \to \infty \quad \text{in } B[0,2],\ \text{aber } f_n \downarrow 0,\ n \to \infty \quad \text{in } C[0,2].$$

Somit ist $\delta_1 \in B[0,2]_c^*$, aber $\delta_1|_{C[0,2]} \notin C[0,2]_c^*$.

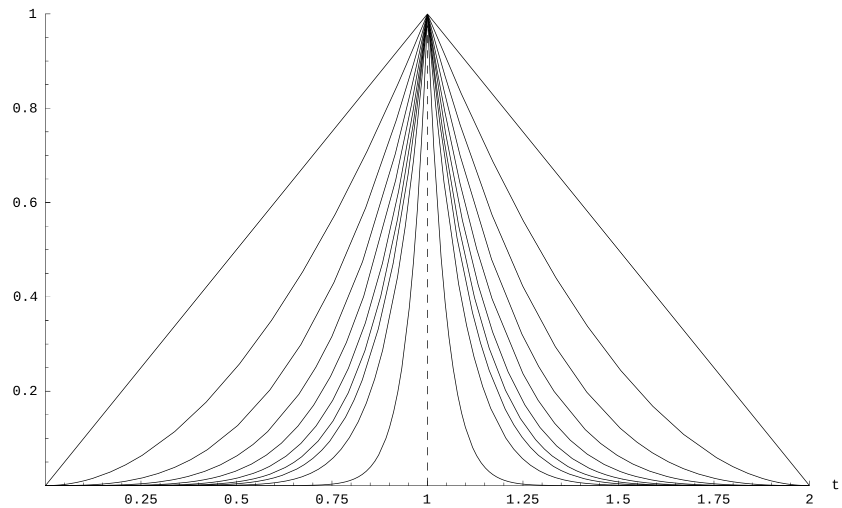

Abbildung 1: Repräsentanten der Funktionenfolge $(f_n)_1^\infty$

In der Tat kann $C[0,2]$ nicht verbandsisomorph zu l^∞ sein, da dann mit $l^\infty = (l^1)^*$ auch $C[0,2]$ Dedekind vollständig sein müsste, was nicht stimmt.

Wir formulieren jetzt das eingangs erwähnte positive Resultat, welches in dieser Arbeit als Hilfssatz dienen wird, aber auch durchaus von eigenem Interesse ist. Dazu führen wir noch folgende Bezeichnungsweise ein: Für eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset E^\sim$ und einen Unterverband $\emptyset \neq V \subset E$ betrachten wir die *Restriktionsmenge* $A|_V := \{x^*|_V \,|x^* \in A\}$.

Lemma 2.2.2 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband und $V \subset E$ ein Unterverband, der verbandsisomorph zu l^∞ ist. Dann ist $E_c^*|_V \subset V_c^*$.*

Beweis. Es sei $\Psi : V \longrightarrow l^\infty$ ein Verbandsisomorphismus. Dann sind Ψ und Ψ^{-1} positiv. Ist nun $(x_m)_{m=1}^\infty \subset V$ eine Folge mit $x_m \downarrow 0,\ m \to \infty$ **in $\boldsymbol{V}$**, so gibt es zu jedem x_m eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n(m))_{n=1}^\infty \in l^\infty$, für die $a_n(m) \downarrow 0$ bei $m \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt nämlich $(a_n(m))_{n=1}^\infty = \Psi x_m \downarrow_m$ und $\Psi x_m \geq 0\ \forall m \in \mathbb{N}$ wegen $\Psi \geq 0$. Ist $l^\infty \ni c \leq \Psi x_m\ \forall m \in \mathbb{N}$, so folgt $V \ni \Psi^{-1}c \leq x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $\Psi^{-1}c \leq 0 \Leftrightarrow c \leq 0$, was $(a_n(m))_{n=1}^\infty \downarrow 0$ bei $m \to \infty$ zeigt.

Ist nun $v \in E$ eine untere Schranke der Menge $\{x_m | m \in \mathbb{N}\}$, so folgt $v \leq 0$, da E insbesondere archimedisch ist: Mit den (paarweise) disjunkten Elementen $v_i := \Psi^{-1}e^i \in V_+$ gilt nämlich $v^+ \wedge v_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $v^+ \wedge V_+ = \{0\}$, was $v^+ = 0$ und schließlich $v \leq 0$ impliziert. Also ist $x_m \downarrow 0$ bei $m \to \infty$ **in**

$\boldsymbol{E}$, so dass $\langle x^*, x_m \rangle \to 0$ bei $m \to \infty$ für alle $x^* \in E_c^*$ folgt. Das impliziert die Behauptung.□

2.3 Schwache Kompaktheitseigenschaften im Dual eines σ-Dedekind vollständigen M-Raumes mit Ordnungseins

Wir kommen zum Kernbereich dieser Arbeit, in dem wir Charakterisierungen der $\sigma(E^\sim, E)$-folgen präkompakten bzw. $\sigma(E^\sim, E)$-kompakten Teilmengen von $E^\sim$ studieren, wo E in der Regel ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins ist. Lediglich in Satz 2.3.13 nehmen wir bzgl. E einen allgemeineren Standpunkt ein, werden aber auch dort den Beweis auf die speziellere Situation zurückführen. In den Arbeiten von H.H.Schaefer und X.D.Zhang [SZ1], [SZ2], [SZ3] und von X.D.Zhang [Zh] finden sich Charakterisierungen schwach* kompakter Teilmengen von E^* mit $E = \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) = \mathrm{B}(\Sigma)$. Insbesondere wird gezeigt, dass schwach* kompakte Teilmengen $A \subset E^*$ sogar schwach kompakt sind, wenn die Menge A nur „klein genug“ gewählt wird, in dem Sinne, dass entweder $A \subset E_c^*$ oder $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ mit geeignetem Maß λ ist. Wir werden im Rahmen dieses Abschnitts diese Resultate für σ-Dedekind vollständige M-Räume mit Ordnungseins verallgemeinern. Aufgrund dessen zitieren wir hier nochmals die entsprechenden Aussagen (siehe [Zh], Theoreme 1.1, 1.3):

Theorem 2.3.1 (Zhang) *Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathrm{B}(\Sigma)_c^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) A ist $\sigma(\mathrm{B}(\Sigma)^*, \mathrm{B}(\Sigma)^{**})$-kompakt;

(2) A ist $\sigma(\mathrm{B}(\Sigma)^*, \mathrm{B}(\Sigma))$-kompakt;

(3) A ist schwach* abgeschlossen und gleichmäßig σ-additiv.

Theorem 2.3.2 (Zhang) *Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathrm{B}(\Sigma)^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) A ist $\sigma(\mathrm{B}(\Sigma)^*, \mathrm{B}(\Sigma)^{**})$-kompakt;

(2) A ist $\sigma(\mathrm{B}(\Sigma)^*, \mathrm{B}(\Sigma))$-kompakt und es existiert ein beschränktes endlich additives und nichtnegatives Skalarmaß λ, so dass $\mu \ll \lambda$ für alle $\mu \in A$ gilt;

(3) A ist schwach* abgeschlossen und gleichmäßig stark additiv.

In den Arbeiten [SZ3], [Zh] wird weiterhin untersucht, unter welchen Voraussetzungen schwach* kompakte Teilmengen von E^* mit $E = \mathrm{C}(K)$ sogar schwach kompakt sind. Hier haben wir folgende Resultate:

Theorem 2.3.3 (Schaefer, Zhang) *Sei K ein kompakter quasi-Stone'scher Raum. Dann ist jede $\sigma(\mathrm{C}(K)^*, \mathrm{C}(K))$-kompakte Teilmenge von $\mathrm{C}(K)^*_c$ auch $\sigma(\mathrm{C}(K)^*, \mathrm{C}(K)^{**})$-kompakt.*

Theorem 2.3.4 (Zhang) *Sei K ein kompakter σ-Stone'scher Raum. Sei A eine $\sigma(\mathrm{C}(K)^*, \mathrm{C}(K))$-kompakte Teilmenge von $\mathrm{C}(K)^*$ ($\cong$ Menge der regulären Borel Maße auf K). Wenn ein nicht-negatives Element $\lambda \in \mathrm{C}(K)^*$ existiert, so dass $\mu \ll \lambda$ für alle $\mu \in A$ gilt, dann ist A $\sigma(\mathrm{C}(K)^*, \mathrm{C}(K)^{**})$-kompakt.*

Auch diese Aussagen werden wir mit verallgemeinern. Dabei benötigen wir nicht die maßtheoretischen Hilfsmittel, die Schaefer und Zhang in ihren Beweisen benutzt haben. Die hier auftretenden Argumente sind relativ elementar und basieren letztlich darauf, dass der Raum $l^1(M)$ die *Schur-Eigenschaft* hat. Entscheidend zu nennen ist hier Satz 2.3.6.

In dieser Arbeit spielen die eben erwähnten „Gleichmäßigkeitsbegriffe“ eine nicht unbedeutende Rolle, so dass wir kurz darauf eingehen. Eine beschränkte Menge von Vektormaßen $\emptyset \neq A \subset \mathrm{ba}(\Sigma, X)$ heißt *gleichmäßig stark additiv* bzw. *gleichmäßig σ-additiv*, falls für jede Folge $(E_n)_1^\infty \subset \Sigma$ paarweise disjunkter Mengen $\sup\{\|\mu(E_n)\| : \mu \in A\} \to 0$ bei $n \to \infty$ gilt, bzw. wenn für jede Folge $(E_n)_1^\infty \subset \Sigma$ mit $E_n \downarrow \emptyset$ dann auch $\sup\{\|\mu(E_n)\| : \mu \in A\} \to 0$ bei $n \to \infty$ ist. Man zeigt leicht, dass das im Fall $X = \mathbb{R}$ äquivalent dazu ist, dass für jede ordnungsbeschränkte disjunkte Folge $(f_n)_1^\infty \subset \mathrm{B}(\Sigma)_+$ dann $\rho_A(f_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ bzw. für jede Folge $(f_n)_1^\infty \subset \mathrm{B}(\Sigma)$ mit $f_n \downarrow 0$ dann $\rho_A(f_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ gilt, wobei $A \cong \{\hat{T}_\mu : \mu \in A\} \subset \mathrm{B}(\Sigma)^*$ ist. Gehen wir jetzt von der abstrakten Situation aus, in der $A \subset E^\sim$ gegeben ist, so definieren wir die Begriffe entsprechend.

Definition 2.3.5 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum und $\emptyset \neq A \subset E^\sim$ sei $\sigma(E^\sim, E)$-beschränkt.*

(i) *A heißt gleichmäßig stark additiv, wenn $\rho_A(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede ordnungs-beschränkte disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset E_+$ gilt.*

(ii) *A heißt gleichmäßig σ-additiv, wenn $\rho_A(x_n) \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede Folge $(x_n)_1^\infty \subset E$ mit $x_n \downarrow 0$ gilt.*

Wir geben jetzt eine erste Kompaktheitsaussage im Raum $(l^\infty)^*$ an, die auch für die weiteren Ergebnisse benötigt wird. Dabei heißt für ein Dualsystem (F, G) zweier Vektorräume eine Teilmenge $A \subset F$ *$\sigma(F, G)$-folgen präkompakt*, falls jede Folge $(x_n)_1^\infty \subset A$ eine Teilfolge enthält, die $\sigma(F, G)$-Cauchy ist. Außerdem bezeichne $\mathrm{B}(\lambda)$ das (hier in $\mathrm{ba}(\mathbb{N})$ gebildete) von λ erzeugte Hauptband.

Satz 2.3.6 *Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathrm{ba}(\mathbb{N}) = (l^\infty)^*$ eine Teilmenge mit $A \subset B(\lambda)$ für ein $\lambda \in \mathrm{ba}(\mathbb{N})_+$. Ist A dann $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-kompakt oder $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-folgen präkompakt, dann existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass $A|_{l^\infty(M)}$ relativ norm-kompakt ist mit $A|_{l^\infty(M)} \subset l^1(M)$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.2.1 existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass $\lambda|_{l^\infty(M)}$ σ-ordnungs stetig ist. Es folgt $\lambda|_{l^\infty(M)} \in \mathrm{ca}(M) \Leftrightarrow \lambda|_{l^\infty(M)} \in l^1(M)$. Da $\mathrm{ca}(M)$ ein Band in $\mathrm{ba}(M)$ ist, haben wir

$$A|_{l^\infty(M)} \subset B(\lambda)|_{l^\infty(M)} \subset B(\lambda|_{l^\infty(M)}) \subset \mathrm{ca}(M)$$

oder äquivalent, dass $A|_{l^\infty(M)} \subset l^1(M)$ ist. Falls A $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-kompakt ist, so ist $A|_{l^\infty(M)} \subset l^1(M)$ relativ $\sigma(l^1(M), l^\infty(M))$-kompakt. Ist A $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-folgen präkompakt, so folgt die $\sigma(l^1(M), l^\infty(M))$-folgen Präkompaktheit von $A|_{l^\infty(M)} \subset l^1(M)$. In beiden Fällen folgt aus dem Theorem von Schur, dass $A|_{l^\infty(M)}$ relativ norm-kompakt ist. □

Theorem 2.3.7 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins. Für eine beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq A \subset E^*$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $\lambda \in E^*_+$, so dass gilt: $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset E^*_c + \mathrm{B}(\lambda)$.*

(ii) *A ist $\sigma(E^*, E)$-folgen präkompakt.*

(iii) *A ist relativ $\sigma(E^*, E^{**})$-kompakt.*

(iv) *A ist gleichmäßig stark additiv.*

(v) *A ist fast ordnungs-beschränkt in dem Sinne, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda \in E^*_+$ existiert, so dass gilt: $A \subset [-\lambda, \lambda] + \varepsilon \mathrm{ball}(E^*)$.*

(vi) *Zu jedem zu $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N})$ verbandsisomorphen Unterverband $U \subset E$ existiert eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass gilt: Ist V der zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorphe Unterverband von U, so ist $A|_V$ relativ norm-kompakt und es gilt $A|_V \subset V^*_c$.*

Bemerkung. Die Implikation „(i)⇒(iv)“ im Fall $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset E^*_c$ erhält man auch mit [Do1], Theorem 5.1(i), welches im wesentlichen auf [F] basiert. Für $\sigma(E^*, E)$-kompakte Teilmengen $A \subset E^*_c$ oder $A \subset \mathrm{B}(\lambda) \subset E^*$ wird dies in [Zh] bzw. [SZ2] gezeigt. Die hier angegebene Bedingung $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset E^*_c + \mathrm{B}(\lambda)$

ist ein wenig allgemeiner.Für Banachverbände mit der Interpolationseigenschaft (I) verweisen wir auf [Zh] (Sect.3).

Beweis. Wir führen den Beweis nach folgendem Schema:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{vi}) \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathrm{i}) \arrow[l, Rightarrow] & (\mathrm{ii}) \arrow[dl, Rightarrow] \\
(\mathrm{v}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{iv}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{iii}) \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Die Äquivalenz der Bedingungen (iii) und (iv) ergibt sich aus einem Theorem von Grothendieck ([MN2], Theorem 2.5.5). Hierbei ist zu beachten, dass eine Menge in E genau dann norm-beschränkt ist, wenn sie ordnungs-beschränkt ist, da in E eine Ordnungseins existiert. Aus einem Theorem von Dunford und Pettis ([MN2], Theorem 2.5.4) ergibt sich die Äquivalenz von (iii) und (v), da das Dual des M-Raumes E ein L-Raum(= $L^1(\mu)$-Raum, siehe [S], Chapt.II, Theorem 8.5) ist.

„(iii),(v)⇒(i)“: Die Menge $\overline{A}^{\sigma(E^*,E^{**})}$ ist nach Voraussetzung $\sigma(E^*,E^{**})$-kompakt, daher auch $\sigma(E^*,E)$-kompakt, also $\sigma(E^*,E)$-abgeschlossen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nun $\lambda_n \in E^*_+$ so gewählt, dass gilt:

$$A \subset [-\lambda_n, \lambda_n] + \frac{1}{n}\mathrm{ball}(E^*).$$

Dann betrachte man

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 + \|\lambda_n\|)^{-1}\lambda_n \in E^*_+.$$

Dafür gilt

$$[-\lambda_n, \lambda_n] \subset (E^*)_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} m[-\lambda, \lambda] \subset \mathrm{B}(\lambda)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $(E^*)_\lambda$ das von $\{\lambda\}$ in E^* erzeugte Hauptideal bezeichnet. Da $\mathrm{B}(\lambda)$ abgeschlossen ist, folgt

$$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(\mathrm{B}(\lambda) + \frac{1}{n}\mathrm{ball}(E^*)\big) = \mathrm{B}(\lambda).$$

Aufgrund der Konvexität von $\mathrm{B}(\lambda)$ ist diese Menge auch $\sigma(E^*, E^{**})$-abgeschlossen, so dass schließlich gilt:

$$\begin{aligned}\overline{A}^{\sigma(E^*,E)} &\subset \overline{\overline{A}^{\sigma(E^*,E^{**})}}^{\sigma(E^*,E)} \\ &= \overline{A}^{\sigma(E^*,E^{**})} \subset \mathrm{B}(\lambda) \subset \mathrm{B}(\lambda) + E_c^*.\end{aligned}$$

„(iii)⇒(ii)“: Zu einer gegebenen Folge $(x_n^*)_1^\infty \subset A$ gibt es nach Eberlein-Šmulians Theorem eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{k(n)}^*)_1^\infty$. Diese ist $\sigma(E^*, E^{**})$-Cauchy, also auch $\sigma(E^*, E)$-Cauchy.

„(i)⇒(vi)“: Nach Voraussetzung sei $\Psi : l^\infty \longrightarrow U$ ein Verbandsisomorphismus auf einen Unterverband $U \subset E$. Dann ist Ψ als positiver Operator auf dem Banachverband l^∞ stetig und vermöge der injektiven Abbildung

$$\Gamma : \ \overline{A}^{\sigma(E^*,E)}|_U \ni x^*|_U \longmapsto x^*\Psi|_{l^\infty} \in (l^\infty)^*$$

können wir $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}|_U$ eindeutig mit einer Teilmenge $A_0 := \Gamma(\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}|_U) \subset \mathrm{ba}(\mathbb{N})$ identifizieren. Die Menge A_0 ist $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-kompakt, da $\overline{A}^{\sigma(E^*,E)}|_U$ $\sigma(U^*, U)$-kompakt ist (man beachte, dass beschränkte Teilmengen von E^* relativ schwach* kompakt sind). Wegen Lemma 2.2.2 ist nun für ein $\lambda \in E_+^*$

$$\begin{aligned} A_0 &= \overline{A}^{\sigma(E^*,E)}|_U \\ &\subset E_c^*|_U + \mathrm{B}(\lambda)|_U \\ &\subset U_c^* + \mathrm{B}(\lambda|_U) \\ &= \mathrm{ca}(\mathbb{N}) + \mathrm{B}(\lambda_0) \end{aligned}$$

mit $\lambda_0 := \lambda|_U \in U_+^* = \mathrm{ba}(\mathbb{N})_+$. Da $\mathrm{ca}(\mathbb{N}) = l^1$ selbst ein Hauptband ist, existiert ein $\lambda_1 \in \mathrm{ba}(\mathbb{N})_+$, so dass $A_0 \subset \mathrm{B}(\lambda_1) + \mathrm{B}(\lambda_0) \subset \mathrm{B}(\lambda_1 + \lambda_0)$ gilt. Die Behauptung folgt nun mit Satz 2.3.6.

„(vi)⇒(iv)“: Angenommen, die Bedingung (iv) sei nicht erfüllt. Dann existiert eine disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset [0, x]$ mit einem $0 \neq x \in E_+$, so dass $\rho_A(x_n) > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n^* \in A$, so dass gilt:

$$\langle |x_n^*|, x_n\rangle = \sup\{|\langle x_n^*, y\rangle| : |y| \leq x_n\} > 4.$$

Daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in [0, x_n] \subset [0, x]$, so dass für die ordnungs-beschränkte disjunkte Folge $(y_n)_1^\infty \in E_+$ dann $|\langle x_n^*, y_n\rangle| > 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist U der zu l^∞ verbandsisomorphe Unterverband von E, der aus

$\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird, dann gibt es nach Voraussetzung eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass für den Unterverband $V \subset U$, der zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorph ist und aus $\{y_n | n \in M\}$ erzeugt wird, gilt: $A|_V \subset V_c^*$ und $A|_V$ ist relativ norm-kompakt. Daher ist $A|_V$ präkompakt, so dass insbesondere zu $\varepsilon = \|x\|^{-1}$ endlich viele Funktionale $z_1^*|_V, \ldots, z_n^*|_V \in A|_V$ existieren, so dass gilt:

$$A|_V \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(z_i^*|_V + \|x\|^{-1} \mathrm{ball}(V^*) \right).$$

Mit $0 \le z^* := |z_1^*|_V| \vee \ldots \vee |z_n^*|_V| \in V_c^*$ ist dann

$$A|_V \subset [-z^*, z^*]_{V^*} + \|x\|^{-1} \mathrm{ball}(V^*).$$

Setzen wir nun $M = \{k(n) | n \in \mathbb{N}\}$, so haben wir $V \ni y_{k(n)} \to 0$ bei $n \to \infty$ in der Topologie $\sigma(E, E^*)$, da diese Folge ordnungs-beschränkt und disjunkt in E ist. Zu jedem $x_{k(n)}^* \in A$ existieren nun $\tau_{k(n)}^* \in [-z^*, z^*]_{V^*}$ und $\varphi_{k(n)}^* \in V^*$ mit $\|\varphi_{k(n)}^*\| \le \|x\|^{-1}$, so dass folgt

$$\begin{aligned} 2 &< |\langle x_{k(n)}^*, y_{k(n)} \rangle| \\ &= |\langle x_{k(n)}^*|_V, y_{k(n)} \rangle| \\ &\le |\langle \tau_{k(n)}^*, y_{k(n)} \rangle| + |\langle \varphi_{k(n)}^*, y_{k(n)} \rangle| \\ &\le \langle |\tau_{k(n)}^*|, y_{k(n)} \rangle + \|\varphi_{k(n)}^*\| \|x\| \\ &\le \langle z^*, y_{k(n)} \rangle + 1. \end{aligned}$$

Ist nun $\hat{z}^*$ eine Hahn-Banach Fortsetzung von z^* auf $E \supset V$, so folgt sofort der Widerspruch $1 < \langle \hat{z}^*, y_{k(n)} \rangle \to 0$ bei $n \to \infty$.

„(ii)$\Rightarrow$ (iv)“: Angenommen, die Bedingung (iv) wäre nicht erfüllt. Dann gibt es eine disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset [0, x]$ für ein $0 \ne x \in E_+$, so dass $\rho_A(x_n) > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie soeben gezeigt, gibt es jetzt Folgen $(x_n^*)_1^\infty \subset A$ und $(y_n)_1^\infty \subset [0, x_n] \subset [0, x]$, so dass $|\langle x_n^*, y_n \rangle| > 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sei wieder $U \subset E$ der aus der Familie $\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte und zu l^∞ verbandsisomorphe Unterverband. Für

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (1 + \|x_n^*\|)^{-1} |x_n^*| \in E_+^*$$

ist dann (wie oben)

$$x_n^* \in [-|x_n^*|, |x_n^*|] \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} m[-\lambda, \lambda] \subset \mathrm{B}(\lambda)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der Restriktionen $A_0 := \{x_n^*|_U | n \in \mathbb{N}\}$ ist nach Voraussetzung $\sigma(U^*, U)$-folgen präkompakt mit $A_0 \subset \mathrm{B}(\lambda|_U)$, wobei $\lambda|_U \in U_+^* = \mathrm{ba}(\mathbb{N})_+$ ist. Nach Satz 2.3.6 existiert dann eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass für den zu $l^\infty(M)$ verbandsisomorphen und aus der Familie $\{y_n | n \in M\}$ erzeugten Unterverband V von U gilt: $A_0|_V$ ist relativ norm-kompakt und $A_0|_V \subset V_c^*$. Ähnlich wie bei der vorigen Implikation ergibt sich damit ein Widerspruch. $\square$

Wir können jetzt zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen eine relativ schwach* folgenkompakte oder schwach* kompakte Teilmenge von E^* nach geeigneter Restriktion sozusagen „lokal" relativ norm-kompakt ist. Ist die Norm auf E nicht ordnungs stetig, so existiert in der Tat zunächst ein abgeschlossener zu l^∞ verbandsisomorpher Unterverband $U \subset E$. Alles Weitere folgt sofort aus Theorem 2.3.7(vi). Formulieren wir das als

Korollar 2.3.8 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins und nicht ordnungs stetiger Norm, und sei $\emptyset \neq A \subset E^*$. Es gelte eine der folgenden Eigenschaften:*

(i) *A ist relativ $\sigma(E^*, E)$-folgen kompakt (=$\sigma(E^*, E)$-folgen präkompakt).*

(ii) *A ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt mit $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ für ein $\lambda \in E_+^*$.*

Dann gibt es einen abgeschlossenen zu l^∞ verbandsisomorphen Unterverband $V \subset E$, so dass $A|_V$ relativ norm-kompakt (im Fall (ii) *sogar norm-kompakt) ist mit $A|_V \subset V_c^*$.*

Ein Vorteil der Topologie $\sigma(E^*, E^{**})$ auf dem Dualraum E^* gegenüber $\sigma(E^*, E)$ ist sicher die Äquivalenz von Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit und solche Mengen sind dann auch schwach (schwach*) folgen präkompakt, wohingegen in der letzteren Topologie „nur" die Folgen Präkompaktheit gleichwertig zur relativen Folgen-Kompaktheit ist. Ein Zusammenhang zur schwach* Kompaktheit besteht im allgemeinen nicht mehr. Nur unter gewissen Voraussetzungen, beispielsweise wenn E reflexiv ist, sind schwach* kompakte Teilmengen von E^* auch $\sigma(E^*, E)$-folgen präkompakt. Den nichtreflexiven Fall ($E = l^\infty$) demonstriert folgendes

Beispiel. Wir betrachten die Funktionale $x_n^* \in \mathrm{ball}((l^\infty)^*)$ mit
$\langle x_n^*, x\rangle := x_n \; \forall x = (x_n)_1^\infty \in l^\infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist $A := \mathrm{ball}((l^\infty)^*)$ schwach* kompakt. Aber A ist nicht $\sigma(\mathrm{ba}(\mathbb{N}), l^\infty)$-folgen präkompakt. Dann müsste es nämlich eine Teilfolge $(x_{k(n)}^*)_{n=1}^\infty$ der obigen Folge geben, die schwach* Cauchy ist. Für die Folge

$y = (y_n)_1^\infty \in l^\infty$ mit

$$y_n := \begin{cases} 1 & \text{falls gilt: } \exists r \in \mathbb{N} : n = k(2r) \ , \\ 0 & \text{für alle anderen } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gilt dann

$$\langle x^*_{k(n)}, y \rangle = y_{k(n)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Folge $(\langle x^*_{k(n)}, y \rangle)_{n=1}^\infty$ ist aber keine Cauchyfolge.

Wir geben jetzt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, wann eine schwach* kompakte Teilmenge im Dual eines σ-Dedekind vollständigen M-Raumes mit Ordnungseins $\sigma(E^*, E)$-folgen präkompakt ist.

Korollar 2.3.9 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins, und $\emptyset \neq A \subset E^*$ sei $\sigma(E^*, E)$-kompakt. Dann ist A genau dann $\sigma(E^*, E)$-folgen kompakt (=$\sigma(E^*, E)$-folgen präkompakt), wenn ein $\lambda \in E^*_+$ existiert, so dass $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ (oder äquivalent $A \subset E^*_c + \mathrm{B}(\nu)$ für ein $\nu \in E^*_+$) gilt.*

Beweis. Zunächst beachte man, dass A als $\sigma(E^*, E)$-beschränkte Teilmenge sogar norm-beschränkt ist. Denn dann ist $\sup\{|\langle x^*, x\rangle| : x^* \in A\} < \infty$ für alle $x \in E$, so dass mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit $\sup\{\|x^*\| : x^* \in A\} < \infty$ folgt. Ist A schwach*-folgen präkompakt, so gibt es zu einer beliebigen Folge $(x^*_n)_1^\infty \subset A$ eine Teilfolge $(x^*_{k(n)})_{n=1}^\infty$, so dass $(\langle x^*_{k(n)}, y\rangle)_{n=1}^\infty$ für alle $y \in E$ eine reelle Cauchyfolge ist. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann $\langle x^*_{k(n)}, y\rangle \to \langle x^*, y\rangle$ bei $n \to \infty$ für alle $y \in E$ mit einem $x^* \in A$, also $x^*_{k(n)} \to x^*$ bei $n \to \infty$ in der Topologie $\sigma(E^*, E)$. Ist schließlich $A \subset E^*_c + \mathrm{B}(\nu)$ für ein $\nu \in E^*_+$, so folgt mit Theorem 2.3.7, dass A fast ordnungs-beschränkt, also $\subset \mathrm{B}(\lambda)$ für ein $\lambda \in E^*_+$ ist (siehe Beweis zu 2.3.7, „(iii),(v)$\Rightarrow$ (i)“). Alles weitere folgt nun wiederum aus Theorem 2.3.7. $\square$

Wir sind jetzt in der Lage, die eingangs erwähnten Charakterisierungen schwach kompakter Teilmengen in $\mathrm{B}(\Sigma)^*_c$ ([Zh], Theorem 1.1 bzw. [SZ3], Theorem 1.1), sowie solcher in $\mathrm{B}(\Sigma)^*$ ([Zh], Theorem 1.3) jeweils auf σ-Dedekind vollständige M-Räume mit Ordnungseins auszudehnen. Die ursprünglichen Beweise sind stark maßtheoretischer Natur (Satz von Radon-Nikodym, Theorem von Drewnowski [DU], p.38) und entsprechend kompliziert. Umso bemerkenswerter ist es, dass die hier gezeigte Verallgemeinerung beider Resultate beweistechnisch relativ elementar einzustufen ist. Man beachte, dass die Eigenschaft $\mu \ll \lambda \ \forall \mu \in A$ für ein $\lambda \in \mathrm{ba}(\Sigma)_+ = \mathrm{B}(\Sigma)^*_+$ gleichbedeutend mit $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ ist. Für einen kompakten Hausdorffraum K ist $\mathrm{C}(K)$ ein M-Raum mit Ordnungseins in der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dieser ist σ-Dedekind vollständig, falls K quasi-Stone'sch (in der Literatur findet man dafür auch die Bezeichnung σ-Stone'sch) ist, d.h. jede offene F_σ-Menge in K einen offenen Abschluss besitzt ([MN2], Prop. 2.1.5). Damit erhalten wir gleichzeitig ein Resultat von Schaefer und Zhang ([SZ3], Theorem 2.1) für schwach* kompakte Teilmengen von $\mathrm{C}(K)^*_c$ mit K quasi-Stone'sch.

Theorem 2.3.10 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins und $A \subset E^*_c$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist $\sigma(E^*, E^{**})$-kompakt;*

(ii) *A ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt;*

(iii) *A ist schwach* abgeschlossen und gleichmäßig σ-additiv (=gleichmäßig stark additiv).*

Beweis. „(i)⇒(ii)" ist trivial. „(ii)⇒(iii)" : Wegen $A = \overline{A}^{\sigma(E^*,E)} \subset E^*_c \subset E^*_c + \mathrm{B}(\lambda)$ für ein $\lambda \in E^*_+$ folgt dies aus Theorem 2.3.7. „(iii)⇒(i)" ergibt sich ebenfalls aus Theorem 2.3.7, wenn man beachtet, dass schwach* abgeschlossene Mengen in E^* $\sigma(E^*, E^{**})$-abgeschlossen sind. □

Theorem 2.3.11 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger M-Raum mit Ordnungseins und $A \subset E^*$ beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist $\sigma(E^*, E^{**})$-kompakt;*

(ii) *A ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt und es existiert ein $\lambda \in E^*_+$, so dass $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ gilt;*

(iii) *A ist schwach* abgeschlossen und gleichmäßig stark additiv.*

Beweis. „(i)⇒(ii)" : Wegen Theorem 2.3.7 ist A fast ordnungs-beschränkt, also $\subset \mathrm{B}(\lambda)$ für ein $\lambda \in E^*_+$. Die übrigen Implikationen folgen wiederum sofort aus Theorem 2.3.7. □

Bemerkung. ([Zh], Remark 1.5) Theorem 2.3.11 ist im allgemeinen nicht mehr richtig, wenn kein Kontrollmaß λ gemäß 2.3.11 (ii) existiert. Ist beispielsweise $\mathrm{B}(\Sigma)$ unendlichdimensional, so ist $A := \mathrm{ball}(\mathrm{ba}(\Sigma)) \subset \mathrm{B}(\Sigma)^*$

schwach* kompakt; aber die Maße in A können nicht gleichmäßig stark additiv sein: Für eine Folge $(E_n)_1^\infty \subset \Sigma$ paarweise disjunkter nicht-leerer Mengen wähle man eine Folge von Operatoren $(T_n)_1^\infty = (\widehat{T}_{\mu_n})_1^\infty \subset \operatorname{ball}(\operatorname{ba}(\Sigma))$ mit

$$1 = \|\chi_{E_n}\|_\infty = |T_n \chi_{E_n}| = |\mu_n(E_n)| \leq \sup\{|\mu(E_n)| : \mu \in \operatorname{ball}(\operatorname{ba}(\Sigma))\}.$$

Sind aber die Funktionale in A alle σ-ordnungs stetig (σ-additiv), so ist die Existenz eines Kontrollmaßes λ nach Theorem 2.3.10 nicht notwendig, obwohl dann die gleichmäßige starke Additivität die Existenz eines solchen sichern würde.

Das nachfolgende Resultat ist der Schlüssel zu Sect. 2.5 in [MN2], wo einige Charakterisierungen schwacher Kompaktheit angegeben werden. Zu nennen sind hier die Sätze von Dunford-Pettis (Theorem 2.5.3 bzw. 2.5.4), sowie das bemerkenswerte Theorem von Grothendieck (2.5.5 in [MN2]). Wir betrachten jetzt zunächst die allgemeinere Situation eines Rieszraumes mit der Interpolationseigenschaft (kurz: Eigenschaft (I)). Der Beweis ist dann allerdings relativ kompliziert, vor allem auch dadurch, dass er auf Rosenthal's Lemma basiert. Speziell für σ-Dedekind vollständige Rieszräume können wir unsere bisher entwickelte Theorie aber nutzen, um ein entsprechendes Resultat wesentlich einfacher zu beweisen. Zum Vergleich geben wir hier beide Beweise an.

Theorem 2.3.12 *Es sei entweder E ein Rieszraum mit der Eigenschaft* (I)*, oder es sei $E = \operatorname{St}(\Omega, \Sigma)$ mit einem messbaren Raum (Ω, Σ). Ist $A \subset E^\sim$ $\sigma(E^\sim, E)$-folgen präkompakt, so ist A gleichmäßig stark additiv.*

Beweis. Wir nehmen an, E habe die Eigenschaft (I). Der Beweis für den anderen Fall verläuft ähnlich.

Angenommen, A sei nicht gleichmäßig stark additiv. Dann gibt es ein $x \in E_+$ und eine disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset [0, x]$, so dass $\rho_A(x_n) > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle man dann ein $x_n^\sim \in A$, so dass gilt:

$$\langle |x_n^\sim|, x_n \rangle = \sup\{|\langle x_n^\sim, y\rangle| : |y| \leq x_n\} > 4.$$

Daher gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in [0, x_n]$, so dass gilt:

$$|\langle x_n^\sim, y_n \rangle| > 2.$$

Nach Voraussetzung können wir annehmen (sonst mit Teilfolge arbeiten), dass $(x_n^\sim)_1^\infty$ eine $\sigma(E^\sim, E)$-Cauchyfolge ist. Die Folge $(y_n)_1^\infty$ ist ordnungsbeschränkt und wegen $0 \leq y_n \wedge y_m \leq x_n \wedge x_m = 0 \; \forall n \neq m$ ebenfalls disjunkt.

Daher gilt $y_n \to 0$ bei $n \to \infty$ in der Topologie $\sigma(E, E^\sim)$. Ist nämlich ein $y^\sim \in E^\sim$ beliebig fixiert, so haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |\langle y^\sim, y_j\rangle| &\leq \sum_{j=1}^{n} \langle |y^\sim|, y_j\rangle \\ &= \left\langle |y^\sim|, \sum_{j=1}^{n} y_j \right\rangle = \left\langle |y^\sim|, \bigvee_{j=1}^{n} y_j \right\rangle \leq \langle |y^\sim|, x\rangle\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also in der Tat $\langle y^\sim, y_n\rangle \to 0$ bei $n \to \infty$. Da also für alle $n \in \mathbb{N}$ dann $\langle x_n^\sim, y_m\rangle \to 0$ bei $m \to \infty$ gilt, können wir bis auf eventuelle Teilfolgenauswahl annehmen, dass

$$|\langle x_n^\sim, y_{n+k}\rangle| < 1$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$ ist. Nun setzen wir

$$y_n^\sim := \begin{cases} x_1^\sim & \text{falls } n = 1, \\ x_n^\sim - x_{n-1}^\sim & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Für die Folge $(y_n^\sim)_1^\infty \subset E^\sim$ gilt $y_n^\sim \to 0$ bei $n \to \infty$ in der Topologie $\sigma(E, E^\sim)$. Außerdem ist

$$|\langle y_n^\sim, y_n\rangle| \geq |\langle x_n^\sim, y_n\rangle| - |\langle x_{n-1}^\sim, y_n\rangle| > 1$$

für alle $n > 1$, was auch für $n = 1$ richtig ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nun $\langle y_m^\sim, y_n\rangle \to 0$ bei $m \to \infty$, so dass wir wiederum bis auf eventuell notwendige Teilfolgenauswahl annehmen können, dass

$$|\langle y_k^\sim, y_n\rangle| < 2^{-n-1}$$

für alle $k > n \geq 1$ gilt. Mit $\varepsilon = 2^{-1}$ folgt nun aus Rosenthal's Lemma in der schwachen Form ([MN2], Theorem 2.3.8), dass eine Teilfolge $(k(n))_{n=1}^\infty$ und eine monoton fallende Folge $(w_n)_1^\infty \subset E_+$ existieren, so dass gilt:

$$\begin{cases} w_n \geq y_{k(m)} \text{ für alle } m > n, \\ w_n \perp y_{k(j)} \text{ für alle } j \leq n, \\ \langle |y_{k(n)}^\sim|, w_n\rangle < 2^{-n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nun setzen wir $z_n := \sum_{j=1}^{n} y_{k(j)} + w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= w_n - (w_{n+1} + y_{k(n+1)}) \\ &= w_n - (w_{n+1} \vee y_{k(n+1)}) \geq 0, \end{aligned}$$

da $w_{n+1}, y_{k(n+1)} \leq w_n$ ist. Daher gilt $y_{k(j)} \leq z_{n+1} \vee y_{k(j)} \leq z_n$ für beliebige $n, j \in \mathbb{N}$. Dabei beachte man, dass für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ $y_{k(j)} \leq w_n \leq z_n$ für alle $j > n$ gilt. Da E die Eigenschaft (I) hat, existiert ein $z \in E$, so dass gilt:

$$y_{k(j)} \leq z \leq z_n \qquad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} |\langle y^{\sim}_{k(n)}, y_{k(j)} \rangle| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-k(j)-1} \\
&\leq 2^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\frac{1}{2}\Big)^j - 1 \Big) \\
&= 2^{-1}\Big(1 - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big) < 2^{-1}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
|\langle y^{\sim}_{k(n)}, z \rangle| &= \Big| \Big\langle y^{\sim}_{k(n)}, y_{k(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} y_{k(j)} + \overbrace{\Big(z - \sum_{j=1}^{n} y_{k(j)} \Big)}^{\leq w_n} \Big\rangle \Big| \\
&\geq |\langle y^{\sim}_{k(n)}, y_{k(n)} \rangle| - \sum_{j=1}^{n-1} |\langle y^{\sim}_{k(n)}, y_{k(j)} \rangle| - \langle |y^{\sim}_{k(n)}|, w_n \rangle \\
&> 1 - 2^{-1} - 2^{-2} = 2^{-2}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $y^{\sim}_{k(n)} \to 0$ bei $n \to \infty$ in der Topologie $\sigma(E^{\sim}, E)$. $\square$

Satz 2.3.13 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum und $\emptyset \neq A \subset E^{\sim}$. Angenommen, es sei eine der folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(i) *A ist $\sigma(E^{\sim}, E)$-kompakt, und es existiert ein $\lambda \in E^{\sim}_{+}$ mit $A \subset E^{\sim}_{c} + \mathrm{B}(\lambda)$.*

(ii) *A ist $\sigma(E^{\sim}, E)$-folgen präkompakt.*

Dann ist A gleichmäßig stark additiv.

Beweis. Es sei $(x_n)_1^{\infty} \subset E_+$ eine ordnungs-beschränkte disjunkte Folge. Sei dann $e \in E_+$, so dass $x_n \in [-e, e]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da E als σ-Dedekind vollständiger Rieszraum insbesondere gleichmäßig vollständig ist

([MN2], Prop. 1.1.8), ist durch $(F, \|\cdot\|_e)$ mit

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-e,e], \\ \|x\|_e &= \inf\{\alpha > 0 | x \in \alpha[-e,e]\} \ \forall x \in F \end{aligned}$$

ein M-Raum mit e als Ordnungseins definiert ([MN2], Prop.1.2.13). Dieser ist auch σ-Dedekind vollständig, da F ein (Ordnungs-)Ideal in E ist. Falls nun (ii) erfüllt ist, so ist $A|_F$ dann $\sigma(F^*, F)$-folgen präkompakt. Insbesondere ist $A|_F \subset F^*$ norm-beschränkt. Anderenfalls gäbe es eine Folge $(x_n^*|_F)_1^\infty \subset A|_F$ mit $\|x_n^*|_F\| \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Diese würde eine $\sigma(F^*, F)$-Cauchy Teilfolge $(x_{k(n)}^*|_F)_{n=1}^\infty$ enthalten, so dass also $\sup\{|\langle x_{k(n)}^*|_F, y\rangle| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ für alle $y \in F$ ist. Mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt der Widerspruch

$$m \leq k(m) \leq \|x_{k(m)}^*|_F\| \leq \sup\{\|x_{k(n)}^*|_F\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Jetzt gelte die Eigenschaft (i). Da $F \subset E$ ein Ideal ist, gilt $E_c^\sim|_F \subset F_c^\sim = F_c^*$. Fixieren wir nämlich ein $x^\sim \in E_c^\sim$, so folgt aus $x_n \downarrow 0$ **in F** sofort $x_n \downarrow 0$ **in E**, also $\langle x^\sim, x_n\rangle \to 0$ bei $n \to \infty$, da aus $0 \leq c \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $c \in E$ sofort $c \in F$, also $c = 0$ folgt. Jedenfalls ist $A|_F \subset F_c^* + \mathrm{B}(\lambda|_F)$ mit $\lambda|_F \in F_+^*$ dann $\sigma(F^*, F)$-kompakt. Wegen Korollar 2.3.9 ist $A|_F$ ebenfalls $\sigma(F^*, F)$-folgen präkompakt. Mit Theorem 2.3.7 folgt dann wegen $x_n \in F \ \forall n \in \mathbb{N}$ und wiederum der Idealeigenschaft von F

$$\begin{aligned} \rho_A(x_n) &= \sup\big\{ \langle |x^*||_F, x_n\rangle : \ x^* \in A\big\} \\ &= \sup\big\{ \ \sup\{\langle x^*, y\rangle : y \in E, |y| \leq x_n\} : \ x^* \in A\big\} \\ &= \sup\big\{ \ \sup\{\langle x^*|_F, y\rangle : y \in F, |y| \leq x_n\} : \ x^*|_F \in A|_F\big\} \\ &= \sup\big\{ \ \big\langle \big|x^*|_F\big|, x_n\big\rangle : \ x^*|_F \in A|_F\big\} \\ &= \rho_{A|F}(x_n) \to 0 \end{aligned}$$

bei $n \to \infty$, also die Behauptung. □

3 Anwendungen der Ergebnisse auf Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren

Wir wollen einen Teil unserer bisherigen Ergebnisse auf ordnungs-schwach kompakte Operatoren (bzw. Teilmengen solcher) anwenden, also lineare Operatoren, die ordnungs-beschränkte Teilmengen eines archimedischen Rieszraumes E in relativ schwach kompakte Teilmengen eines (reellen) Banachraumes X abbilden. Diese Definition geht auf P.G. Dodds [Do2] zurück. Wir setzen hier stets voraus, dass E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum ist.

Im ersten Abschnitt studieren wir Restriktionseigenschaften ordnungs-schwach kompakter Operatoren. In Anlehnung an ein Theorem von Pelczynski ([MN2], Cor. 3.4.5), welches die Einschränkbarkeit eines *nicht* ordnungs-schwach kompakten Operators zu einem sozusagen lokal l^∞ „transportierenden" Isomorphismus thematisiert, wollen wir zeigen, dass sich ein ordnungs-schwach kompakter Operator unter gewissen Voraussetzungen kompakt auf einen Unterverband $\cong l^\infty$ einschränken lässt, was stets möglich ist, wenn die Norm auf E nicht ordnungs stetig ist. Im zweiten Abschnitt präsentieren wir eine Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes von Yosida-Hewitt, die maßgeblich auf der Faktorisierungseigenschaft eines ordnungs-schwach kompakten Operators über einen Banachverband mit ordnungs stetiger Norm basiert (siehe auch [MN2], Theorem 3.4.6). Wir benötigen dieses Resultat im folgenden letzten Abschnitt (Theorem 3.3.6). Dort werden wir auch einige unserer Ergebnisse des zweiten Kapitels anwenden, um zu zeigen, dass gewisse $L_s(E, X)$-kompakte bzw. -folgen präkompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt sind. Dies entspricht sozusagen den Gleichmäßigkeitsaussagen 2.3.10, 2.3.11 und 2.3.13 im Falle der schwach* Topologie. Noch bemerkenswerter ist aber, dass sich damit zugleich Verallgemeinerungen der Vitali-Hahn-Saks Theoreme für Vektormaße ergeben. Details können den jeweiligen Abschnitten entnommen werden.

3.1 Restriktion ordnungs-schwach kompakter Operatoren

Ein nicht ordnungs-schwach kompakter Operator $T : E \longrightarrow X$ auf einem σ-Dedekind vollständigen Banachverband E besitzt eine bemerkenswerte Restriktionseigenschaft: Es existiert ein zu l^∞ verbandsisomorpher abgeschlossener Unterverband $U \subset E$, der durch T isomorph auf einen abgeschlossenen Untervektorraum des Bildraumes abgebildet wird (im Engl. „*T preserve a sublattice isomorphic to l^∞*“). Dieses Resultat geht auf Pelczynski (1965) zurück und charakterisiert sogar die nicht ordnungs-schwach kompakten Operatoren. Wir geben hier einen ausführlichen Beweis an, der die Methoden zu [MN2], Prop.2.3.13 aufgreift (siehe auch [Do2], Theorem 7.1).

Theorem 3.1.1 (Pelczynski) *Seien E ein Banachverband, X ein (reeller) Banachraum und $T : E \longrightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator.*

(i) *Sei E σ-Dedekind vollständig. Dann ist T genau dann nicht ordnungs-schwach kompakt, wenn ein zu l^∞ verbandsisomorpher abgeschlossener Unterverband $U \subset E$ und ein abgeschlossener Untervektorraum $V \subset X$ ($V \cong l^\infty$) existieren, so dass die Restriktion $T|_U : U \longrightarrow X$ zu einem linearen Isomorphismus auf V wird.*

(ii) *Genau dann ist T nicht ordnungs-schwach kompakt, wenn ein zu c_0 verbandsisomorpher abgeschlossener Unterverband $U \subset E$ mit in E ordnungs-beschränkter Einheitskugel und ein abgeschlossener Untervektorraum $V \subset X$ ($V \cong c_0$) existieren, so dass $T|_U : U \longrightarrow X$ zu einem linearen Isomorphismus auf V wird.*

Beweis. Die Aussage (ii) wird in [MN2], Cor. 3.4.5 bewiesen. Wir zeigen hier nur den für uns interessanten (und dort nicht bewiesenen) Fall (i).

„$\Leftarrow$“: Wir können sofort $U = l^\infty, V = l^\infty$ annehmen. Nach dem Satz vom inversen Operator ist $T|_U : U \longrightarrow V$ bistetig. Wäre dann T ordnungs-schwach kompakt, so ist

$$\mathrm{ball}(l^\infty) = T^{-1}(T\mathrm{ball}(l^\infty)) = T^{-1}(T[-(1)_1^\infty, (1)_1^\infty]_U)$$

relativ $\sigma(l^\infty, \mathrm{ba}(\mathbb{N}))$-kompakt. Das ist nicht möglich, da l^∞ nicht reflexiv ist.

„$\Rightarrow$“: Nach dem Theorem von Dodds existiert eine disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset [0, x]$ mit einem $x \in E_+$, so dass $\|Tx_n\| > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert nach einem Hahn-Banach Theorem ein $y_n^* \in \mathrm{ball}(X^*)$ mit $\langle y_n^*, Tx_n \rangle > 1$. Wegen $\langle |T^* y_n^*|, x \rangle \leq \|T^* y_n^*\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Voraussetzungen des Rosenthal'schen Lemmas ([MN2], Theorem 2.3.7) erfüllt. Sei $0 < \varepsilon < 4^{-1}$. Dann existiert eine Teilfolge $(k(n))_{n=1}^\infty$, so dass gilt:

$$\left\langle |T^* y_{k(n)}^*|, \bigvee_{\mathbb{N} \ni j \neq n} x_{k(j)} \right\rangle < \varepsilon.$$

Wir können sofort $k(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Anderenfalls setze man $M = \{k(n) | n \in \mathbb{N}\}$ und arbeite mit $\mathrm{St}(M)$ statt $\mathrm{St}(\mathbb{N})$ weiter.

Jedes endlich-wertige $z \in l^\infty$ besitzt eine Darstellung $z = \sum_{i=1}^r a_i \chi_{A_i} \in \mathrm{St}(\mathbb{N})$ mit paarweise disjunkten Teilmengen $A_1, \ldots, A_r \subset \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$. Mit den üblichen Argumenten zeigt man dann, dass der Operator $S : \mathrm{St}(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ mit

$$S\Big(\sum_{i=1}^r a_i \chi_{A_i}\Big) := \sum_{i=1}^r a_i T\Big(\bigvee_{j\in A_i} x_j\Big)$$

wohldefiniert und linear ist. Wegen

$$|\langle y^*, Sz\rangle| \le \sum_{i=1}^r |a_i| |\langle y^*, T\Big(\bigvee_{j\in A_i} x_j\Big)\rangle| \le \|z\|_\infty \|T\| \|x\|$$

für alle $y^* \in \mathrm{ball}(X^*)$ und alle $z \in \mathrm{St}(\mathbb{N})$, ist S stetig mit $\|S\| \le \|T\|\|x\|$. Nun sei $z \in \mathrm{St}(\mathbb{N})$ beliebig fixiert und o.B.d.A. $\|z\|_\infty = |a_1|$. Für jedes $n \in A_1$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
\|Sz\| &\ge |\langle y_n^*, Sz\rangle| \\
&\ge \Big|\Big\langle T^* y_n^*, \sum_{i=1}^r a_i \bigvee_{j\in A_i} x_j\Big\rangle\Big| \\
&\ge \Big|\Big\langle T^* y_n^*, x_n + \bigvee_{\substack{j\in A_1\\ j\neq n}} x_j\Big\rangle\Big| \|z\|_\infty - \sum_{i=2}^r \Big\langle |T^* y_n^*|, \bigvee_{j\in A_i} x_j\Big\rangle \|z\|_\infty \\
&\ge \langle T^* y_n^*, x_n\rangle \|z\|_\infty - \Big\langle |T^* y_n^*|, \bigvee_{\substack{j\in A_1\\ j\neq n}} x_j + \bigvee_{i=2}^r \bigvee_{j\in A_i} x_j\Big\rangle \|z\|_\infty \\
&\ge \|z\|_\infty - \Big\langle |T^* y_n^*|, \bigvee_{\mathbb{N}\ni j\neq n} x_j\Big\rangle \|z\|_\infty \\
&\ge (1-\varepsilon)\|z\|_\infty \ge 2^{-1}\|z\|_\infty.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{St}(\mathbb{N})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ dicht in $l^\infty = \mathrm{B}(\mathbb{N})$ liegt, gibt es zu beliebig fixiertem $z \in l^\infty$ eine Folge $(z_n)_1^\infty \subset \mathrm{St}(\mathbb{N})$ mit $\|z - z_n\|_\infty \to 0$ bei $n \to \infty$. Für die stetige lineare Fortsetzung $\widehat{S} : l^\infty \longrightarrow X$ von S gilt dann (bei Grenzübergang $n \to \infty$ in der gezeigten Doppelungleichung)

$$2^{-1}\|z\|_\infty \le \|\widehat{S}z\| \le \|T\|\|x\|\|z\|_\infty.$$

Also definiert $\widehat{S}$ einen linearen Isomorphismus auf den abgeschlossenen Untervektorraum $V = \widehat{S}(l^\infty)$. Ist dann U der abgeschlossene zu l^∞ verbandsisomorphe Unterverband von E, der aus $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird, so ist in der Tat $T|_U = \widehat{S}$. □

In Anlehnung an die gerade formulierte Restriktionseigenschaft lässt sich für einen ordnungs-schwach kompakten Operator $T : E \longrightarrow X$ unter gleichen Voraussetzungen an E zeigen, dass *falls* ein zu l^∞ verbandsisomorpher Unterverband $U \subset E$ existiert, sich T noch soweit einschränken lässt, dass diese Restriktion als dualer Operator eines geeigneten kompakten Operators darstellbar ist.

Satz 3.1.2 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband und sei $T : E \longrightarrow X$ ordnungs-schwach kompakt. Ist $U \subset E$ ein zu l^∞ verbandsisomorpher Unterverband, dann enthält U einen zu l^∞ verbandsisomorphen Unterverband V, so dass die Restriktion $T|_V$ kompakt ist und sich als dualer Operator darstellen lässt.*

Beweis. Wir können sofort $U = l^\infty$ annehmen. Dann ist die Restriktion $T_1 := T|_U : l^\infty \longrightarrow X$ wegen $T_1(\mathrm{ball}(U)) = T[-(1)_1^\infty, (1)_1^\infty]_U \subset T[-(1)_1^\infty, (1)_1^\infty]_E$ schwach kompakt, so dass nach Gantmacher's Theorem ([MN2], Cor.3.5.5) $A := T_1^*(\mathrm{ball}(X^*)) \subset (l^\infty)^*$ relativ schwach kompakt ist. Wegen Theorem 2.3.7 gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, so dass $A|_{l^\infty(M)}$ relativ norm-kompakt ist mit $A|_{l^\infty(M)} \subset l^\infty(M)_c^* = l^1(M)$. Nun sei $T_0 := T_1|_{l^\infty(M)} : l^\infty(M) \longrightarrow X$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} Sx^* := T_0^* x^* &= T_1^* x^*|_{l^\infty(M)} \\ &\in \|x^*\| T_1^*(\mathrm{ball}(X^*))|_{l^\infty(M)} \subset l^1(M) \end{aligned}$$

ein stetiger linearer Operator $S : X^* \longrightarrow l^1(M)$ definiert, der wegen $S(\mathrm{ball}(X^*)) \subset A|_{l^\infty(M)}$ kompakt ist.

Jetzt betrachten wir den dualen Operator $S^* : l^1(M)^* = l^\infty(M) \longrightarrow X^{**}$. Für alle $x \in l^\infty(M) \subset l^\infty(M)^{**}$ und alle $x^* \in X^*$ ist

$$\langle S^* x, x^* \rangle = \langle x, Sx^* \rangle = \langle x, T_0^* x^* \rangle = \langle T_0^{**} x, x^* \rangle = \langle T_0 x, x^* \rangle,$$

also $T|_{l^\infty(M)} = T_0 = S^*$. Da auch S^* kompakt ist, folgt die Behauptung mit $V = l^\infty(M) \cong l^\infty$. □

Als Folgerung erhalten wir sofort einen dem Korollar 2.3.8 von der Aussage her ähnlichen Satz, der besagt, dass ein schwach kompakter Operator auf einem σ-Dedekind vollständigen Banachverband *mit nicht ordnungs stetiger Norm* (beispielsweise $E = \mathrm{C}(K)$ mit nicht endlichem quasi-Stone'schem

Raum K) sich auf einen geeigneten nicht-trivialen Unterverband $U \subset E$ kompakt einschränken lässt. Das ist zunächst einmal immer möglich: Man wähle einen *endlichdimensionalen* Unterverband in E aus. Dieser hat eine kompakte Einheitskugel, deren Bild unter dem stetigen Operator T sogar norm-kompakt ist. Doch aus dem gerade gezeigten Satz ergibt sich unmittelbar das Folgende unendlichdimensionale Resultat:

Korollar 3.1.3 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Banachverband mit nicht ordnungs stetiger Norm und $T : E \longrightarrow X$ schwach kompakt. Dann existiert ein abgeschlossener zu l^∞ verbandsisomorpher Unterverband V von E, so dass die Restriktion $T|_V$ kompakt ist.*

3.2 Ein Zerlegungssatz für ordnungs-schwach kompakte Operatoren

Ausgangspunkt dieses Abschnitts ist der Zerlegungssatz von Yosida-Hewitt für stark additive Maße (= ordnungs-schwach kompakte Operatoren auf $E = \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)$) mit Werten in einem Banachraum X. Für einen Beweis verweisen wir auf [DU], p.30. Er benutzt eine entsprechende skalarwertige Version des Zerlegungssatzes, die ebenfalls auf Yosida-Hewitt zurückgeht ([DS], Chapt. III, Theorem 7.8).

Theorem 3.2.1 (Yosida, Hewitt) *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $F : \Sigma \longrightarrow X$ ein stark additives Maß. Dann existieren eindeutig bestimmte stark additive Maße $F_c, F_p : \Sigma \longrightarrow X$, so dass gilt:*

(i) *F_c ist abzählbar additiv (=σ-additiv) auf Σ;*

(ii) *$x^* F_p$ ist rein endlich additiv auf Σ für alle $x^* \in X^*$;*

(iii) *$F = F_c + F_p$.*

Im Rahmen dieses Abschnitts wollen wir (im Sinne der Identifizierung 1.3.9) diesen Satz auf ordnungs-schwach kompakte Operatoren auf einem σ-Dedekind vollständigen Rieszraum E ausdehnen, zumal wir dieses Resultat dann im nächsten Abschnitt (Theorem 3.3.6) benötigen. Weitere entsprechende Resultate findet man in [K], Kapitel 7. Bevor wir die Verallgemeinerung formulieren, muss der Begriff des (skalarwertigen) rein endlich additiven Maßes auf solche Maße mit Werten in einem Banachraum X übertragen werden (siehe [DS], Chapt. III, Def. 7.7).

Definition 3.2.2 *Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Ein beschränktes Maß $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ heißt rein endlich additiv, wenn das reellwertige Maß $x^*\mu$ rein* *endlich additiv für alle $x^* \in X^*$ ist, in dem Sinne, dass das einzige σ-additive nicht-negative reellwertige Maß λ mit $0 \leq \lambda(E) \leq |x^*\mu|(E)\ \forall E \in \Sigma$ das Maß $\lambda = 0$ ist (oder äquivalent: $x^*\mu \in \mathrm{ca}(\Sigma)^\perp\ \forall x^* \in X^*$).*

Für den dualen Operator $\widehat{T}_\mu^* : X^* \longrightarrow \mathrm{B}(\Omega,\Sigma)^* = \mathrm{ba}(\Sigma)$ gilt nun

$$\langle \widehat{T}_\mu^* x^*, \chi_A\rangle = \langle x^*, \widehat{T}_\mu \chi_A\rangle = x^*\mu(A)\ \forall A \in \Sigma,$$

so dass $\widehat{T}_\mu^* x^* = x^*\mu$ für alle $x^* \in X^*$ folgt. Also ist $\mu \in \mathrm{ba}(\Sigma, X)$ genau dann rein endlich additiv, wenn $T_\mu^\sim(X^*) \subset (\mathrm{B}(\Omega,\Sigma)_c^\sim)^\perp$ gilt. In diesem Sinne können wir die eingangs erwähnte Verallgemeinerung wie folgt formulieren:

Satz 3.2.3 *Seien E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum und $T : E \longrightarrow X$ ordnungs-schwach kompakt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung $T = T_c + T_s$, so dass T_c σ-ordnungs-norm stetig und T_s ordnungs-schwach kompakt und rein endlich additiv ist, in dem Sinne, dass $T_s^\sim(X^*) \subset (E_c^\sim)^\perp$ gilt.*

Beweis. Existenz: Da $E^\sim$ ein Dedekind-vollständiger Rieszraum ist, sind die Bänder $E_c^\sim$ und $(E_c^\sim)^\perp$ in $E^\sim$ sogar Projektionsbänder ([MN2], Theorem 1.2.9). Ist dann $P_c : E^\sim \longrightarrow E_c^\sim \subset E^\sim$ die Bandprojektion auf $E_c^\sim$, so ist $P_s := I - P_c : E^\sim \longrightarrow (E_c^\sim)^\perp \subset E^\sim$ die Bandprojektion auf $(E_c^\sim)^\perp$. Nach Theorem 1.3.10 existieren ein Banachverband F mit ordnungs stetiger Norm, ein positiver linearer Operator $Q : E \longrightarrow F$ und ein linearer Operator $S : F \longrightarrow X$ mit $\|S\| \leq 1$, so dass $T = SQ$ gilt. Wir gehen nun schrittweise zu folgender Dualisierung über:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & X \\ F \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E^\sim & X^* \arrow[l, "T^\sim"'] \arrow[dl, "S^*"] \\ F^* \arrow[u, "Q^\sim"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E^{\sim\sim} \arrow[r, "T^{\sim\sim}"] \arrow[d, "Q^{\sim\sim}"'] & X^{**} \\ F^{**} \arrow[ur, "S^{**}"'] & \end{tikzcd}$$

Dualitätsbemerkungen. Gemäß Theorem 1.3.10 ist Q intervall-beschränkt. Wie wir in 1.3.8 gesehen haben, ist durch $\langle Q^\sim x^*, x\rangle := \langle x^*, Qx\rangle\ \forall x^* \in F^*\ \forall x \in E$ in der Tat ein linearer Operator $Q^\sim : F^* \longrightarrow E^\sim$ definiert. Zu diesem *dualen Operator* können wir nun durch $\langle Q^{\sim\sim}x^{\sim\sim}, x^*\rangle := \langle x^{\sim\sim}, Q^\sim x^*\rangle\ \forall x^{\sim\sim} \in E^{\sim\sim}\ \forall x^* \in F^*$ einen *bidualen Operator* $Q^{\sim\sim} : E^{\sim\sim} \longrightarrow (F^*)^\sim = F^{**}$ definieren. Mit Q sind auch $Q^\sim, Q^{\sim\sim}$ Verbandshomomorphismen und damit insbesondere positiv ([K], Lemma 2.6). Man beachte die Strukturen bzgl. des Ursprungsoperators: Der linke Raum trägt nur eine Ordnungsstruktur, der rechte Ordnungsstruktur und eine Norm. Wenn wir nun für (allgemein einen intervall-beschränkten

Operator) $T : E \longrightarrow X$ analog duale Operatoren einführen, müssen wir beachten, dass der linke Ursprungsraum eine Ordnungsstruktur, der Raum X aber lediglich eine Normstruktur und keine Ordnung trägt. Dies hat für den zugehörigen bidualen Operator folgende Konsequenz:

$$T^{\sim\sim}(E^{\sim\sim}) = S^{**}Q^{\sim\sim}(E^{\sim\sim}) \subset S^{**}(F^{**}) \subset X^{**}.$$

Wir setzen unseren Beweis fort und definieren

$$\begin{aligned} T_c &:= (P_c T^{\sim})^{\sim}|_E = T^{\sim\sim}P_c^{\sim}|_E, \\ T_s &:= (P_s T^{\sim})^{\sim}|_E = T^{\sim\sim}P_s^{\sim}|_E. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass hierdurch (lineare) Operatoren $T_c, T_s : E \longrightarrow X$ definiert sind.

Für beliebig fixiertes $x^{\sim\sim} \in E_+^{\sim\sim}$ und alle $x^{\sim} \in E_+^{\sim}$ gilt nun

$$\langle P_c^{\sim}x^{\sim\sim}, x^{\sim}\rangle = \langle x^{\sim\sim}, P_c x^{\sim}\rangle \leq \langle x^{\sim\sim}, x^{\sim}\rangle, \ (*)$$

also insbesondere $0 \leq P_c x \leq x \in I(E) \subset E^{\sim\sim}$ $\forall x \in E_+$, da die Bandprojektion P_c positiv ist. Hierbei bezeichnet $I(E)$ das von E in $E^{\sim\sim}$ erzeugte Ideal. Es folgt $P_c(E) \subset I(E)$ und genauso zeigt man $P_s(E) \subset I(E)$. Da E ein Unterverband von $E^{\sim\sim}$, F ein Unterverband von F^{**} ist, ergibt sich im Hinblick auf [MN2], Prop. 1.2.5:

$$\begin{aligned} I(E) &= \bigcup \{n[-x,x]_{E^{\sim\sim}} : n \in \mathbb{N}, x = |x_1| \vee \ldots \vee |x_r|, \ x_1, \ldots, x_r \in E\} \\ &= \bigcup \{n[-y,y]_{E^{\sim\sim}} : n \in \mathbb{N}, y \in E_+\}, \\ I(F) &= \bigcup \{n[-u,u]_{F^{**}} : n \in \mathbb{N}, u = |u_1| \vee \ldots \vee |u_s|, \ u_1, \ldots, u_s \in F\} \\ &= \bigcup \{n[-v,v]_{F^{**}} : n \in \mathbb{N}, v \in F_+\}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Positivität von $Q^{\sim\sim}$ ergibt sich mit $Q^{\sim\sim}(E_+) = Q(E_+) \subset F_+$ dann

$$Q^{\sim\sim}I(E) \subset \bigcup \{n[-Q^{\sim\sim}y, Q^{\sim\sim}y]_{F^{**}} : n \in \mathbb{N}, y \in E_+\} \subset I(F).$$

Die Norm auf F ist ordnungs stetig, so dass F ein Ideal in F^{**} ist ([MN2], Theorem 2.4.2), insbesondere also $Q^{\sim\sim}I(E) \subset F$ folgt. Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} T_c(E) &= (SQ)^{\sim\sim}P_c^{\sim}(E) \subset S^{**}Q^{\sim\sim}I(E) \subset S^{**}(F) \subset X, \\ T_s(E) &= S^{**}Q^{\sim\sim}P_s^{\sim}(E) \subset F. \end{aligned}$$

In der Tat ist

$$T_c + T_s = ((P_c + P_s)T^\sim)^\sim|_E = T^{\sim\sim}|_E = T.$$

Außerdem gelten folgende Inklusionen:

$$\begin{aligned} T_c^\sim(X^*) &= P_c^{\sim\sim}T^{\sim\sim\sim}(X^*) = P_c^{\sim\sim}T^\sim(X^*) \subset P_c^{\sim\sim}(E^\sim) = P_c(E^\sim) \subset E_c^\sim, \\ T_s^\sim(X^*) &= P_s^{\sim\sim}T^{\sim\sim\sim}(X^*) \subset P_s(E^\sim) \subset (E_c^\sim)^\perp. \end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass T_c, T_s ordnungs-schwach kompakt sind. Dazu fixieren wir eine ordnungs-beschränkte disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty$ in E_+. Dann sind $(P_c^\sim x_n)_1^\infty$ und $(P_s^\sim x_n)_1^\infty$ wegen obiger Ungleichung $(*)$ jeweils ordnungs-beschränkte disjunkte Folgen in $I(E)$. Da $Q^{\sim\sim}$ ein Verbandshomomorphismus ist, sind auch die Folgen $(Q^{\sim\sim}P_c^\sim x_n)_1^\infty$ und $(Q^{\sim\sim}P_s^\sim x_n)_1^\infty$ ordnungs-beschränkt und disjunkt in F. Wiederum mit [MN2], Theorem 2.4.2 ergibt sich aufgrund der ordnungs Stetigkeit der Norm auf F und aufgrund der Stetigkeit von S^{**}

$$\begin{aligned} \|T_c x_n\| &= \|S^{**}Q^{\sim\sim}P_c^\sim x_n\| \le \|Q^{\sim\sim}P_c^\sim x_n\| \to 0, \\ \|T_s x_n\| &= \|S^{**}Q^{\sim\sim}P_s^\sim x_n\| \le \|Q^{\sim\sim}P_s^\sim x_n\| \to 0 \end{aligned}$$

jeweils bei $n \to \infty$. Die ordnungs-schwach Kompaktheit beider Operatoren folgt jetzt aus dem Theorem von Dodds. Aus Satz 1.3.8 folgt, dass T_c σ-ordnungs-norm stetig ist.

Eindeutigkeit: Seien $T_1, T_2 : E \longrightarrow X$ ordnungs-schwach kompakte Operatoren, so dass T_1 σ-ordnungs-norm stetig und T_2 rein endlich additiv ist mit $T = T_1 + T_2$. Dann ist wegen Satz 1.3.8 $T_1^\sim(X^*) \subset E_c^\sim$, und es folgt sofort

$$(T_c - T_1)^\sim(X^*) = (T_2 - T_s)^\sim(X^*) \subset E_c^\sim \cap (E_c^\sim)^\perp = \{0\},$$

also $(T_c - T_1)^\sim = 0$ und $(T_2 - T_s)^\sim = 0$. Mit einem Hahn-Banach Theorem folgt schließlich $T_1 = T_c$ und $T_2 = T_s$. □

In der Tat ist dieser Satz eine Verallgemeinerung des Theorems von Yosida-Hewitt. Ist nämlich $F : \Sigma \longrightarrow X$ stark additiv, so ist der zugehörige Operator $\widehat{T}_F : E = \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ (ordnungs-) schwach kompakt, so dass (ordnungs-) schwach kompakte Operatoren $T_c, T_s : \mathrm{B}(\Omega, \Sigma) \longrightarrow X$ existieren, für die gilt: T_c ist σ-ordnungs-norm stetig, T_s ist rein endlich additiv und $T_F = T_c + T_s$. Dann sind die zugehörigen Maße $F_c, F_p : \Sigma \longrightarrow X$ mit $F_c(A) = T_c\chi_A,\ F_p(A) = T_s\chi_A\ \forall A \in \Sigma$ stark additiv mit $F = F_c + F_p$. Außerdem ist F_c σ-additiv. Jetzt sei $x^* \in X^*$ beliebig fixiert und es sei $\lambda \in \mathrm{ca}(\Sigma)_+$ mit $\lambda \le |x^*F_p|$. Dann ist $\widehat{T}_\lambda \in \mathrm{B}(\Omega, \Sigma)_c^\sim$ und wegen [K], Satz 5.5

folgt $\widehat{T}_\lambda \leq \widehat{T}_{|x^*F_p|} = |T_s^\sim x^*| \in (\mathrm{B}(\Omega,\Sigma)_c^\sim)^\perp$. Also ist $\widehat{T}_\lambda = 0$ und damit $\lambda = 0$. Wir haben gezeigt, dass F_p rein endlich additiv ist. Da T_c, T_s eindeutig bestimmt sind, gilt dies auch für die Maße F_c und F_p.

Völlig analog zum Zerlegungssatz von Yosida-Hewitt beweist man auch den Zerlegungssatz von Lebesgue ([DU], p.31), in dem die Eigenschaft „rein endlich additiv“ durch eine Singularitätsaussage und die σ-Additivität des anderen Maßes durch eine Stetigkeitsaussage ersetzt wird.

Theorem 3.2.4 (Zerlegungssatz von Lebesgue) *Seien (Ω,Σ) ein messbarer Raum und $F : \Sigma \longrightarrow X$ stark additiv. Weiterhin sei $\lambda : \Sigma \longrightarrow [0,\infty[$ ein endlich additives Maß. Dann existieren eindeutig bestimmte Vektormaße $F_c, F_s : \Sigma \longrightarrow X$, so dass gilt:*

(i) *F_c ist λ-stetig;*

(ii) *x^*F_s und λ sind zueinander singulär für alle $x^* \in X^*$;*

(iii) *$F = F_c + F_s$.*

Sind zusätzlich F und λ jeweils σ-additiv, so sind auch F_c und F_s σ-additiv.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes findet man in [K], Kapitel 7. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

3.3 Kompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren in der starken Operatortopologie

Wir dehnen unsere Diskussion schwach* kompakter Teilmengen im Dualraum E^* auf Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren aus, wobei wir allgemeiner die starke Operatortopologie zugrundelegen. Dabei ergeben sich Verallgemeinerungen der vektorwertigen Vitali-Hahn-Saks Sätze auf Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren. Bevor wir das genauer diskutieren, gehen wir nochmals von der klassischen Vitali-Hahn-Saks Version ([DU], Theorem 8, p.23) aus und bringen in diesem Zusammenhang das Theorem 2.3.11 ins Spiel. Hierfür, wie auch für alle weiteren Diskussionen, benötigen wir Gleichmäßigkeitsbegriffe, die die gleichmäßige starke Additivität bzw. die gleichmäßige σ-Additivität von X-wertigen Maßen auf Operatoren ausdehnen.

Definition 3.3.1 *Seien E ein archimedischer Rieszraum und X ein reeller Banachraum. Die Teilmenge $\mathcal{A} \subset L(E,X)$ sei gleichmäßig intervallbeschränkt in dem Sinne, dass $\sup\{q_T(x) | T \in \mathcal{A}\} < \infty$ für alle $x \in E$ gilt.*

(i) *$\mathcal{A}$ heißt gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt, wenn*

$$\sup\{q_T(x_n)|T \in \mathcal{A}\} = \sup\{\|Ty\||y \in E,\ |y| \le x_n,\ T \in \mathcal{A}\} \to 0$$

bei $n \to \infty$ für alle ordnungs-beschränkten disjunkten Folgen $(x_n)_1^\infty \subset E_+$ gilt.

(ii) *$\mathcal{A}$ heißt gleichmäßig σ-ordnungs-norm stetig, wenn $\sup\{q_T(x_n)|T \in \mathcal{A}\} \to 0$ bei $n \to \infty$ für jede Folge $(x_n)_1^\infty \subset E$ mit $x_n \downarrow 0$ gilt.*

Theorem 3.3.2 (Vitali-Hahn-Saks-Nikodym) *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum, X ein reeller Banachraum und $(F_n)_1^\infty$ eine Folge stark additiver Maße $F_n : \Sigma \longrightarrow X$ (=ordnungs-schwach kompakter Operatoren $T_n : \mathrm{B}(\Sigma) \longrightarrow X$). Ist die Folge $(F_n)_1^\infty$ punktweise norm-konvergent, so ist $\{F_n|n \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig stark additiv (=gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt).*

In der Tat liefert Theorem 2.3.11 für den Fall $E = \mathrm{B}(\Sigma)$ eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf Folgen beschränkter endlich-additiver Skalarmaße:

Zu einer punktweise konvergenten Folge $(F_n)_1^\infty \subset \mathrm{ba}(\Sigma)$ mit dem Grenzmaß $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R},\ F(E) := \lim_{n\to\infty} F_n(E) \forall E \in \Sigma$ bilden wir die schwach* kompakte Teilmenge

$$A := \{F_n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{F\} \subset \mathrm{ba}(\Sigma) = \mathrm{B}(\Sigma)^*.$$

Dann ist $A \subset \mathrm{B}(\lambda)$ für $\lambda := \sum_{n=1}^\infty (2^n(1 + \|F_n\|))^{-1}|F_n| \in \mathrm{B}(\Sigma)_+^*$, wie etwa der Beweis zu Theorem 1.1 in [Zh] zeigt.

Korollar 3.3.3 *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $(F_n)_1^\infty \subset \mathrm{ba}(\Sigma)$ punktweise konvergent. Dann ist die Familie $\{F_n|n \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig stark additiv.*

Ist unter den gleichen Voraussetzungen $(F_n)_1^\infty$ eine Folge in $\mathrm{ca}(\Sigma)$, so ist $\{F_n|n \in \mathbb{N}\}$ als gleichmäßig stark additive Familie σ-additiver Maße gleichmäßig σ-additiv. Man kann sogar zeigen (siehe [MN2], Cor. 2.5.21 bzw. [DU], Cor. 10, p.24):

Korollar 3.3.4 (Vitali-Hahn-Saks) *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $(F_n)_1^\infty \subset \mathrm{ca}(\Sigma)$ mit $F_n \ll \lambda \in \mathrm{ca}(\Sigma)_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist dann $(F_n)_1^\infty$ punktweise konvergent mit dem Grenzmaß $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R},\ F(E) := \lim_{n\to\infty} F_n(E) \forall E \in \Sigma$, so ist $\{F_n|n \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig σ-additiv und auch gleichmäßig λ-stetig. Außerdem ist $F \in \mathrm{ca}(\Sigma)$ und F ist ebenfalls λ-stetig.*

Wir weiten unsere Betrachtungen nun auf X-wertige Maße aus und ersetzen dementsprechend die schwach* Topologie durch die starke Operatortopologie.

Korollar 3.3.3 verallgemeinert das Vitali-Hahn-Saks Theorem 3.3.2 auf Folgen beschränkter endlich-additiver Skalarmaße und wir wollen jetzt ein noch allgemeineres Resultat ([Zh], Theorem 2.1) erwähnen, welches insbesondere das bekannte Vitali-Hahn-Saks Theorem für Folgen beschränkter endlich-additiver Vektormaße ([Zh], Cor.2.2) verallgemeinert.

Theorem 3.3.5 (Zhang) *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum, X ein reeller Banachraum und $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathrm{B}(\Sigma), X)$ kompakt in der starken Operatortopologie. Gibt es dann ein $\lambda \in \mathrm{ba}(\Sigma)_+$ mit $x^*F \ll \lambda$ für alle $F \in \mathcal{A}$ und für alle $x^* \in X^*$ (insbesondere, wenn $F \ll \lambda$ für alle $F \in \mathcal{A}$ gilt), dann sind die Maße in $\mathcal{A}$ gleichmäßig stark additiv (=gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt) und gleichmäßig λ-stetig.*

Indem wir die hier formulierte Bedingung $T^{\sim}(X^*) \subset \mathrm{B}(\lambda)\ \forall T \in \mathcal{A}$ auf den jeweils rein endlich additiven Anteil des Operators einschränken, können wir eine etwas allgemeinere „Vitali-Hahn-Saks“ -Version für kompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren auf einem σ-Dedekind vollständigen Rieszraum zeigen.

Theorem 3.3.6 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum, und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, X)$ eine Teilmenge ordnungs-schwach kompakter Operatoren, so dass ein $\lambda \in E_+^{\sim}$ mit $T_s^{\sim}(X^*) \subset \mathrm{B}(\lambda) \subset E^{\sim}$ für alle $T \in \mathcal{A}$ existiert. Ist dann $\mathcal{A}$ kompakt in der starken Operatortopologie $L_s(E, X)$, so ist $\mathcal{A}$ gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt.*

Bevor wir in den eigentlichen Beweis einsteigen, benötigen wir eine Hilfsaussage. Dieses Resultat findet sich (in etwas anderer Form) in der Arbeit [SZ2] und wir geben hier auch dessen Beweis an, da er zum Verständnis der Thematik beiträgt. Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge $U \subset X^*$ *gleichgradig stetig in $x \in X$* heißt, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $N_U(x, \delta) := \sup\{|\langle x^*, x - y\rangle| : x^* \in U,\ y \in X \text{ mit } \|x - y\| \leq \delta\} \to 0$ bei $\delta \to 0$;

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* : \ |\langle x^*, x - y\rangle| \leq \varepsilon \ \forall y \in X \text{ mit } \|x - y\| \leq \delta \ \forall x^* \in U.$

Die Teilmenge $U \subset X^*$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ gleichgradig stetig ist.

Lemma 3.3.7 *Seien E ein Rieszraum und X ein reeller Banachraum. Außerdem sei $S \subset \mathcal{L}(E,X)$, und U sei eine gleichgradig stetige Teilmenge von X^*. Der Raum $\mathcal{L}(E,X)$ werde mit der starken Operatortopologie, X^* und $E^\sim$ mit den Topologien $\sigma(X^*,X)$ bzw. $\sigma(E^\sim,E)$ versehen. Dann ist die Abbildung*

$$S \times U \ni (T,x^*) \longmapsto T^\sim x^* \in E^\sim$$

stetig (links bzgl. der Produkttopologie).

Beweis. Da der Bildraum die Topologie $\sigma(E^\sim,E)$ der punktweisen Konvergenz trägt, reicht es zu zeigen, dass für alle $x \in E$ die Abbildungen

$$S \times U \ni (T,x^*) \longmapsto \langle T^\sim x^*, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

stetig sind (man kann hier beispielsweise mit konvergenten Netzen argumentieren). Dazu fixieren wir ein $x \in E$. Dann seien $T_0 \in S$ und $x_0^* \in U$ ebenfalls fixiert. Wir wählen ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Da U im Punkt T_0x gleichgradig stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, so dass $|\langle x^*, z - T_0x\rangle| \le \varepsilon/2$ für alle $z \in X$ mit $\|z - T_0x\| < \delta$ und für alle $x^* \in U$ gilt. Wir wählen eine $L_s(E,X)$-Nullumgebung:

$$\mathcal{U} := \{T - T_0 : T \in \mathcal{L}(E,X) \text{ mit } \|Tx - T_0x\| < \delta\}.$$

Für alle $T \in (T_0 + \mathcal{U}) \cap S$ ist dann $|\langle x^*, (T - T_0)x\rangle| \le \varepsilon/2$ für alle $x^* \in U$.

Weiterhin ist die Abbildung

$$U \ni x^* \longmapsto \langle x^*, T_0x\rangle = \langle T_0^\sim x^*, x\rangle \in \mathbb{R}$$

offensichtlich stetig bzgl. der Topologie $\sigma(X^*,X) \cap U$. Daher gibt es eine $\sigma(X^*,X)$-Nullumgebung $\mathcal{V} \subset X^*$, so dass für alle $x^* \in (x_0^* + \mathcal{V}) \cap U$ gilt:

$$|\langle T_0^\sim x^* - T_0^\sim x_0^*, x\rangle| \le \varepsilon/2.$$

Für alle $(T,x^*) \in S \times U$ mit $(T,x^*) \in (T_0,x_0^*) + \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} |\langle T^\sim x^* - T_0^\sim x_0^*, x\rangle| &\le |\langle T^\sim x^* - T_0^\sim x^*, x\rangle| + |\langle T_0^\sim x^* - T_0^\sim x_0^*, x\rangle| \\ &= |\langle x^*, (T - T_0)x\rangle| + |\langle T_0^\sim (x^* - x_0^*), x\rangle| \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung unter $(*)$ im (beliebig gewählten) Punkt $(T_0, x_0^*) \in S \times U$ stetig, was die Behauptung impliziert. □

Beweis von Theorem 3.3.6. Offensichtlich ist die Einheitskugel $\mathrm{ball}(X^*)$ gleichgradig stetig. Wegen des gerade gezeigten Lemmas ist dann die Abbildung

$$\mathcal{A} \times \mathrm{ball}(X^*) \ni (T, x^*) \xmapsto{\Phi} T^{\sim} x^* \in E^{\sim}$$

stetig. Mit den Sätzen von Banach-Alaoglu und Tychonoff folgt, dass

$$A := \bigcup \{T^{\sim}\mathrm{ball}(X^*) | T \in \mathcal{A}\} = \Phi(\mathcal{A} \times \mathrm{ball}(X^*))$$

kompakt in der Topologie $\sigma(E^{\sim}, E)$ ist.

Nach dem Zerlegungssatz 3.2.3 gibt es zu jedem Operator $T \in \mathcal{A}$ ordnungs-schwach kompakte Operatoren $T_c, T_s : E \longrightarrow X$ mit

$$A \subset T^{\sim}(X^*) \subset T_c^{\sim}(X^*) + T_s^{\sim}(X^*) \subset E_c^{\sim} + \mathrm{B}(\lambda)$$

für ein $\lambda \in E_+^{\sim}$. Aufgrund von Satz 2.3.13 ist A gleichmäßig stark additiv. Für eine ordnungs-beschränkte disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty$ in E_+ gilt dann (mit [MN2], Lemma 3.4.3)

$$\begin{aligned}
\rho_A(x_n) &= \sup\{\langle |x^*|, x_n\rangle : x^* \in \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T^{\sim}\mathrm{ball}(X^*)\} \\
&= \sup\{\langle |x^*|, x_n\rangle : x^* \in T^{\sim}\mathrm{ball}(X^*),\ T \in \mathcal{A}\} \\
&= \sup\{\rho_{T^{\sim}\mathrm{ball}(X^*)}(x_n) : T \in \mathcal{A}\} \\
&= \sup\{q_T(x_n) : T \in \mathcal{A}\} \to 0
\end{aligned}$$

bei $n \to \infty$. Also ist $\mathcal{A}$ gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt. □

Zu Theorem 3.3.5 gibt es eine entsprechende recht allgemeine Version des Vitali-Hahn-Saks Theorems für Teilmengen σ-additiver Vektormaße, die in der Arbeit [SZ2] (Theorem 10) neben anderen ähnlichen Resultaten gezeigt wird.

Theorem 3.3.8 (Schaefer, Zhang) *Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum und X ein reeller Banachraum. Ist dann $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathrm{B}(\Sigma), X)$ eine in der starken Operatortopologie kompakte Teilmenge, die aus σ-additiven Maßen (=σ-ordnungs-norm stetigen Operatoren) besteht, so ist $\mathcal{A}$ gleichmäßig σ-additiv (=gleichmäßig σ-ordnungs-norm stetig in dem Sinne, dass $\mathcal{A}$ gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt ist).*

Da eine gleichmäßig ordnungs-schwach kompakte Menge σ-ordnungs-norm stetiger Operatoren gleichmäßig σ-ordnungs-norm stetig ist, erhalten wir aus Theorem 3.3.6 sofort eine etwas allgemeinere Version von Theorem 3.3.8.

Theorem 3.3.9 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum, und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, X)$ eine $L_s(E, X)$-kompakte Teilmenge σ-ordnungs-norm stetiger Operatoren, so dass ein $\lambda \in E_+^\sim$ mit $T_s^\sim(X^*) \subset \mathrm{B}(\lambda) \subset E^\sim$ für alle $T \in \mathcal{A}$ existiert. Dann ist $\mathcal{A}$ gleichmäßig σ-ordnungs-norm stetig.*

Eine andere Form des klassischen Vitali-Hahn-Saks Theorems für Vektormaße erhält man für $L_s(E, X)$-folgen präkompakte Teilmengen ordnungs-schwach kompakter Operatoren. Wir beschränken uns auf den Fall, dass E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum ist, da wir mit unseren Methoden einen transparenteren (und dem Beweis zu Theorem 2.3.12 sehr ähnlichen) Beweis angeben können als im allgemeineren Fall eines Rieszraumes mit der Interpolationseigenschaft (I). Hier verweisen wir auf die Arbeit von [Do2] (Theorem 6.4).

Lemma 3.3.10 *Seien E ein Banachraum und X ein normierter Raum. Jede $L_s(E, X)$-folgen präkompakte Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, X)$ ist beschränkt in der Operatornorm.*

Beweis. Eine Folge $(T_n)_1^\infty \subset \mathcal{L}(E, X)$ ist genau dann $L_s(E, X)$-Cauchy, wenn sie punktweise Cauchy ist. Die Behauptung folgt daher aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit (siehe auch Beweis zu Satz 2.3.13). □

Theorem 3.3.11 *Sei E ein σ-Dedekind vollständiger Rieszraum, und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, X)$ eine Teilmenge ordnungs-schwach kompakter (σ-ordnungs-norm stetiger) Operatoren. Ist $\mathcal{A}$ $L_s(E, X)$-folgen präkompakt (also in der starken Operatortopologie), so ist $\mathcal{A}$ gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt (gleichmäßig σ-ordnungs-norm stetig).*

Beweis. Angenommen, $\mathcal{A}$ wäre nicht gleichmäßig ordnungs-schwach kompakt. Dann gibt es eine disjunkte Folge $(x_n)_1^\infty \subset E_+$ mit $x_n \in [0, e] \forall n \in \mathbb{N}$ und einem $e \in \mathrm{ball}(E)_+$, so dass

$$\sup\{\ \|Ty\| :\ y \in E,\ |y| \leq x_n,\ T \in \mathcal{A}\} > 5$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Somit existieren Folgen $(T_n)_1^\infty \subset \mathcal{A}$ und $(y_n)_1^\infty \subset [0, x_n] \subset [0, e]$ mit $\|T_n y_n\| > 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(y_n)_1^\infty$ ist disjunkt. Da $\mathcal{A}$ folgen präkompakt in der starken Operatortopologie ist, können wir annehmen, dass $(T_n)_1^\infty$ eine $L_s(E, X)$-Cauchyfolge ist (sonst kann man mit einer Teilfolge arbeiten). Daher ist $(T_n x)_1^\infty \subset X$ konvergent für alle $x \in E$. Jetzt ist $y_n \in E_e = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} m[-e, e]\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}|_{E_e} = \{T|_{E_e} : E_e \longrightarrow X | T \in \mathcal{A}\}$ ist $L_s(E_e, X)$-folgen präkompakt. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es daher ein $C > 0$, so dass gilt:

$$5 < \|T_n|_{E_e}\| \|y_n\| \leq C\|y_n\|\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei dann $U \subset E_e$ der von $\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte und zu l^∞ verbandsisomorphe Unterverband. Wir können sofort $E = U$ annehmen, so dass E zu einem σ-Dedekind vollständigen M-Raum mit Ordnungseins wird. Da jedes T_n ordnungs-schwach kompakt ist, haben wir $T_n y_{n+k} \to 0$ bei $k \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ([MN2], Theorem 3.4.4). Indem wir eventuell zu einer Teilfolge übergehen ($k(n)$ anstelle von k), können wir dann sofort $\|T_n y_{n+k}\| < 1$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ annehmen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n : E \longrightarrow X$ definiert durch

$$S_n := \begin{cases} T_1 & \text{falls } n = 1, \\ T_n - T_{n-1} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann ist für alle $n > 1$

$$\|S_n y_n\| \geq \|T_n y_n\| - \|T_{n-1} y_n\| > 4,$$

was auch für $n = 1$ richtig ist. Außerdem gilt $\|S_n x\| = \|T_n x - T_{n-1} x\| \to 0$ bei $n \to \infty$ für alle $x \in E$, insbesondere $\|S_n y_k\| \to 0$ bei $n \to \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass eine Teilfolge $(S_{n(k)})_{k=1}^\infty$ mit $\|S_{n(k)} y_k\| < 2^{-k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ existiert. Wir können daher sofort $\|S_n y_k\| < 2^{-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ annehmen. Es folgt

$$\sum_{j=1}^{n-1} \|S_n y_j\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j} = 1 - 2^{-n+1} < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da jedes T_n (ordnungs-) schwach kompakt ist, gilt das auch für die Operatoren S_n, so dass nach Gantmacher's Theorem $S_n^* \text{ball}(X^*) \subset E^* (= U^*)$ relativ $\sigma(E^*, E^{**})$-kompakt ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 2.3.7 gibt es daher (zu $\varepsilon = 1$) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $0 \leq z_n^* \in E^*$, so dass gilt:

$$S_n^* \text{ball}(X^*) \subset [-z_n^*, z_n^*] + \text{ball}(E^*) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2.2.1 impliziert, dass eine unendliche Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ existiert, so dass die Restriktion $\lambda|_{l^\infty(M)}$ von

$$0 \leq \lambda := \sum_{n=1}^{\infty} (2^n (1 + \|z_n^*\|))^{-1} z_n^* \in U^* = \text{ba}(\mathbb{N})$$

σ-ordnungs stetig ist. Nun existiert eine Folge $(k_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, so dass $0 \leq z_n^*|_{l^\infty(M)} \leq k_n \lambda|_{l^\infty(M)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also auch jede Restriktion $z_n^*|_{l^\infty(M)}$ σ-ordnungs stetig ist.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $M = \mathbb{N}$ ist. Sei dann ein $z_n^* = z^* \in E_c^*$ beliebig fixiert. Da die Folge $(x_n)_1^\infty \subset E_+$ ordnungs-beschränkt und disjunkt ist, haben wir $(\langle z^*, x_n\rangle)_{n=1}^\infty \in l^1$. Dann ist

$$\sum_{m=k}^{\infty} \langle z^*, x_m\rangle = \lim_{s\to\infty} \left\langle z^*, \bigvee_{m=k}^{s} x_m \right\rangle = \left\langle z^*, \bigvee_{m=k}^{\infty} x_m \right\rangle \to 0$$

bei $k \to \infty$, so dass wir (bis auf eventuell notwendigen Übergang zu einer Teilfolge) annehmen können, dass gilt:

$$\left\langle z_n^*, \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\rangle < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt folgt:

$$\begin{aligned} \left\| S_n \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\| &= \sup \left\{ \left| \left\langle S_n^* y^*, \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\rangle \right| \;:\; y^* \in \operatorname{ball}(X^*) \right\} \\ &\leq \left\langle z_n^*, \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\rangle + \left\| \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\| < 1 + \|e\|_e = 2. \end{aligned}$$

Wir setzen $z := \bigvee_{m=1}^{\infty} x_m$. Dann ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|S_n z\| &= \left\| S_n \Big(\bigvee_{m=1}^{n-1} x_m \vee x_n \vee \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \Big) \right\| \\ &= \left\| S_n \sum_{m=1}^{n-1} x_m + S_n x_n + S_n \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\| \\ &\geq \|S_n x_n\| - \sum_{m=1}^{n-1} \|S_n x_m\| - \left\| S_n \bigvee_{m=1}^{\infty} x_{n+m} \right\| \\ &> 4 - 1 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $S_n x \to 0$ bei $n \to \infty$ für alle $x \in E$. □

Literatur

[AB] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, Orlando-San Diego-New York-London (1985).

[BD1] O. Burkinshaw, P.G. Dodds, *Weak sequential Compactness and Completeness in Riesz Spaces*, Canad. J. Math. **6**, 1332-1339 (1976)

[BD2] O. Burkinshaw, P.G. Dodds, *Disjoint Sequences, Compactness, and Semireflexivity in Locally Convex Riesz Spaces*, Illinois J. Math. **21**, 759-775 (1977)

[Da] M.M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973)

[DU] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys **15** (1977)

[Do1] P.G. Dodds, *Sequential Convergence in the Order Dual of Certain Classes of Riesz Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **203**, 391-403 (1975)

[Do2] P.G. Dodds, *o-Weakly Compact Mappings of Riesz Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **214**, 389-402 (1975)

[DS] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Wiley, New York

[F] D.H. Fremlin, *Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge (1974)

[K] G. Kronsbein, Thesis. University Osnabrück (1995)

[KMN] G. Kronsbein, P. Meyer-Nieberg, *Factorization of Vector Measures*, Arch. Math. **63**, 541-548 (1994)

[LZ] W.J.A. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam-London (1971)

[MN1] P. Meyer-Nieberg, *Zur schwachen Kompaktheit in Banachverbänden*, Math. Z. **134**, 303-315 (1973)

[MN2] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin-New York (1991)

[MNM] P. Meyer-Nieberg, C. Möller, *Weak Compactness in Dual Spaces*, Arch. Math. **78**, 215-222 (2002)

[N] C.P. Niculescu, *Operators of Type A and Local Absolute Continuity*, J. Oper. Theory **13**, 49-61 (1985)

[S] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin-New York (1974)

[SZ1] H.H. Schaefer, X.D. Zhang, *A Note on Order Bounded Vector Measures*, Arch. Math. **63**, 152-157 (1994)

[SZ2] H.H. Schaefer, X.D. Zhang, *On the Vitali-Hahn-Saks Theorem*, Oper. Theory: Adv. and Appl. **75** (1995)

[SZ3] H.H. Schaefer, X.D. Zhang, *A Variant of Grothendieck's Theorem on Weak* Convergent Sequences*, Arch. Math. **65**, 251-254 (1995)

[Za] A.C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford (1983)

[Zh] X.D. Zhang, *On Weak Compactness in Spaces of Measures*, J. Funct. Anal. **143**, 1-9 (1997)