Spektraltheorie gewöhnlicher linearer Differentialoperatoren vierter Ordnung

Dissertation

Otto Abels
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Initiiert durch die Arbeit von Weyl [67] und in der Folgezeit motiviert durch die Fragen, welche die Entwicklung der Quantenmechanik aufwarf, wurden seit Beginn des 20. Jahrhunderts die Sturm-Liouville Operatoren $\tau y = -(p(x)y')' + q(x)y$ bzw. die eindimensionalen Schrödinger Operatoren $\tau y = -y'' + q(x)y$ intensiv untersucht. Einen knappen Überblick über die wichtigsten Entwicklungen der letzten 50 Jahre gibt Barry Simon in [59].

Ziel dieser Arbeit ist es, größere Klassen von Operatoren vierter Ordnung systematisch zu untersuchen: Wir studieren die Spektraltheorie linearer selbstadjungierter Differentialoperatoren, die durch den formal selbstadjungierten gewöhnlichen Differentialausdruck

$$\tau\, y = w^{-1}\,[\,(r\, y'')'' - (py')' + qy\,]\,, \qquad x \in [0,\infty) \tag{1.1}$$

- im (komplexen) Hilbertraum $\mathcal{H} := L_2([0,\infty); w\,dx)$ erzeugt werden.
- $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $w(x)$ sind reellwertig und meßbar mit $r(x)$, $w(x) > 0$;
- 0 ist ein regulärer Randpunkt: r^{-1}, p, q, $w \in L_{1,lok}([0,\infty))$.

Die verschiedenen Teile des Spektrums (σ) einer selbstadjungierten Realisierung werden untersucht: das absolut stetige (σ_{ac}), singulär stetige (σ_{sc}), wesentliche (σ_{ess}) und diskrete Spektrum, die spektralen Vielfachheiten, sowie die Halbbeschränktheit nach unten (für die Definitionen siehe [65]). Nach [43] ist jeder selbstadjungierte Differentialausdruck mit reellen Koeffizienten notwendigerweise von gerader Ordnung ($2n$) und für $n = 2$ gegeben durch (1.1).

Die Titchmarsh-Weyl Theorie [60, 42] der Sturm-Liouville Operatoren wurde u.a. von Kodaira [38] auf gewöhnliche Differentialoperatoren der Ordnung $2n$ (reelle Koeffizienten) übertragen. Abgesehen vom mathematischen Wettstreit der 60-iger bis 80-iger Jahre des letzten Jahrhunderts über die Bestimmung der Defektzahlen (siehe beispielsweise [25, 33, 17, 62, 63, 23, 47, 22]) – eine aus heutiger Sicht sicherlich lösbare Aufgabe – ist über das Spektrum selbstadjungierter Differentialoperatoren höherer Ordnung nur wenig bekannt. Einige Resultate findet man in den Büchern von Glazman [27] und Naimark [43].
Das Studium wird erheblich dadurch erschwert, daß nun auch spektrale Vielfachheiten der Ordnung $n > 1$ auftreten können (das Spektralmaß ist matrixwertig) und aufgrund der Anzahl von Koeffizientenfunktionen wesentlich mehr Fälle zu berücksichtigen sind. Die elegante, von Gilbert und Pearson entwickelte Methode der untergeordneten Lösungen [26] steht ebenfalls nicht zur Verfügung. Ein weiterer Aspekt, der bei Operatoren zweiter Ordnung nicht eintreten kann, ist der intermediäre Defektfall (für Operatoren vierter Ordnung der Defektfall $(3, 3)$).
Durch Einführung sogenannter abstrakter M-Funktionen und basierend auf der wohlbekannten Transformationsformel der Titchmarsh-Weyl m-Funktion [14, 48] konnte Remling [52] im minimalen Defektfall Aussagen über spektrale Vielfachheiten sowie Stabilitätseigenschaften des Spektrums herleiten. In [53] wurden diese Ergebnisse auf bestimmte Klassen von Operatoren vierter Ordnung angewandt. Aufbauend auf die Techniken dieser Arbeiten konnten Behncke, Hinton und Remling in [10] zeigen, daß selbstadjungierte Differentialoperatoren der Ordnung $2n$ mit fast konstanten Potentialen im wesentlichen dieselben spektralen Eigenschaften besitzen wie die ungestörten Operatoren mit konstanten Koeffizienten.

Die generelle Idee, die den Untersuchungen dieser Arbeit zugrundeliegt, besteht wie in [10, 53] (vgl. auch [7, 8] für Operatoren zweiter Ordnung) in der Verknüpfung der Theorie der Asymptotischen Integration (für eine ausführliche Darstellung siehe [22]) mit der Theorie der M-Matrix (siehe beispielsweise [5, 34, 36, 37, 52]).

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen versetzt uns ersteres in die Lage, Aussagen über das asymptotische Verhalten ($x \to \infty$) der Lösungen der zu (1.1) gehörenden Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(r\,y'')'' - (py')' + qy = z\,w\,y\,, \qquad z \text{ ein komplexer Parameter,} \tag{1.2}$$

treffen zu können (Kapitel 3). Mit Hilfe der Zerlegungsmethode [43], der Analyse der Titchmarsh-Weyl Matrix $M(z)$ (Kapitel 2), Methoden der Oszillationstheorie [27], sowie weiterer geeigneter Techniken (in Kapitel 3.5 werden einige häufig benutzte Hilfsmittel zusammengetragen) können diese Informationen dann genutzt werden, um sowohl im minimalen als auch im intermediären Defektfall auf spektrale Aussagen der entsprechenden selbstadjungierten Realisierungen zu schließen.

Es ist bekannt [22, 3.1 - 3.5], daß eine Entwicklung asymptotischer Formeln stark von den relativen Größenverhältnissen der Koeffizientenfunktionen ($x \to \infty$) geprägt ist. In der Situation von (1.2) sind die entscheidenden Größen $\tilde{p} := p/(rw)^{1/2}$, $\tilde{q} := q/w$. Dementsprechend untersuchen wir in dieser Arbeit (Kapitel 5 - 8) Kombinationen von Fällen der Form

- $\tilde{p}$ beschränkt $\quad\vee\quad \tilde{p}(x) \to -\infty \quad\vee\quad \tilde{p}(x) \to +\infty \qquad (x \to \infty)$
- $\tilde{q}$ beschränkt $\quad\vee\quad \tilde{q}(x) \to -\infty \quad\vee\quad \tilde{q}(x) \to +\infty \qquad (x \to \infty)$,

wobei diese Fälle entsprechend den Größenverhältnissen ($\tilde{p}^{\,2} = O(\tilde{q})$, $\tilde{p}^{\,2} = o(\tilde{q})$, $\tilde{q} = O(\tilde{p}^{\,2})$, $\tilde{q} = o(\tilde{p}^{\,2})$) weiter zu differenzieren sind (vgl. Bemerkungen in Kapitel 3.4).

1.1 Grundlagen und Notationen

In diesem Abschnitt werden einige für die Untersuchungen relevante Begriffe, Methoden und Zusammenhänge aus der Spektraltheorie gewöhnlicher linearer Differentialoperatoren zusammengetragen; die Notation orientiert sich an der ausführlichen Darstellung in [66] (siehe aber auch [43, 27, 42]). Für die zugrundeliegende Hilbertraumtheorie linearer Operatoren siehe beispielsweise [65, 4, 18].

Der durch τ in $\mathcal{H}$ erzeugte Operator mit maximal möglichem Definitionsbereich – derart, daß (1.1) Sinn macht und τ einen Operator in $\mathcal{H}$ erzeugt – ist erklärt durch

$$D_T := \{y \in \mathcal{H} : y,\, y',\, r\,y'',\, p\,y' - (r\,y'')' \text{ sind absolut stetig auf } [0,\infty) \text{ und } \tau\,y \in \mathcal{H}\}\,,$$

$$T y := \tau\, y\,.$$

Alle weiteren durch τ erzeugten Operatoren sind Einschränkungen des (nicht symmetrischen) maximalen Operators T. Selbstadjungierte (s.a.) Realisierungen gewinnt man nun durch geeignete Fortsetzung des sogenannten minimalen Operators $T_0 \subset T$, der erklärt ist als die Abschließung des symmetrischen Operators T_0':

$$D_{T_0'} := \{y \in D_T : y \text{ hat kompakten Träger in } (0,\infty)\}\,,$$

$T_0 := \overline{T_0'}$. T_0 und T sind zueinander adjungierte Operatoren, d.h. $T_0 = T^*,\ T = T_0^*$; für s.a. Realisierungen A von τ gilt also $T_0 \subset A \subset T$ (aus $S \subset T_0$ folgt $T \subset S^*$).

Nach der von Neumannschen Erweiterungstheorie (siehe beispielsweise [65, 43]) besitzt ein abgeschlossener symmetrischer Operator im komplexen Hilbertraum s.a. Fortsetzungen genau dann, wenn seine Defektzahlen (γ_+, γ_-) übereinstimmen; die Defektzahl $\gamma_\pm$ von T_0 gibt die Dimension des Nullraumes $N(T \pm i)$ an, also die Anzahl linear unabhängiger, quadratintegrierbarer (d.h. in $\mathcal{H}$ liegender) Lösungen von (1.2) für $Im\ z > 0$ bzw. $Im\ z < 0$ (die Defektzahlen sind in der oberen und unteren Halbebene konstant).

Offensichtlich (die Koeffizientenfunktionen sind reellwertig) besitzt T_0 gleiche Defektzahlen $\gamma_\pm = \gamma$. Da 0 nach Voraussetzung regulär ist, gilt

$$2 \le \gamma \le 4\,.$$

Selbstadjungierte Realisierungen können nun als γ-dimensionale Erweiterungen von T_0 charakterisiert werden: Nach der ersten von Neumannschen Formel gilt

$$D_T = D_{T_0} \dot{+} N(T-i) \dot{+} N(T+i),$$

und nach der zweiten von Neumannschen Formel sind die s.a. Realisierungen A_V gegeben durch

$$D_{A_V} = D_{T_0} \dot{+} \{y + V\,y :\ y \in N(T-i)\}$$

mit einer unitären Abbildung $V : N(T-i) \to N(T+i)$.

Kombiniert man nun diese abstrakte Charakterisierung mit der Eigenschaft, daß τ ein Differentialausdruck gerader Ordnung ist, so lassen sich die s.a. Realisierungen nach [66, Sätze 3.10, 4.6, 4.11] (vgl. auch [43, §18]) mit Hilfe der Greenschen Formel durch Einschränkung des maximalen Operators mittels Randbedingungen (in 0 und gegebenenfalls in ∞) gewinnen, wobei wir in dieser Arbeit nur Operatoren mit getrennten Randbedingungen studieren (Kapitel 2).

Mit Hilfe der in der Einleitung erwähnten Techniken erhalten wir spektrale Aussagen über Operatoren in $L_2((a,\infty), w\,dx)$ (a hinreichend groß). Diese Informationen müssen zurückübersetzt werden auf die ursprünglichen Operatoren in $L_2([0,\infty), w\,dx)$. Einige der spektralen Eigenschaften s.a. Realisierungen hängen also sowohl von den gewählten Randbedingungen als auch vom Zerlegungspunkt a ab (vgl. Kapitel 2.3/3.5).

Die in dieser Arbeit benutzten *Notationen* sind Standard:

Sind $f(x), g(x)$ auf $[a,\infty)$ definierte komplexwertige Funktionen, so schreiben wir $f(.) \in L_p$, falls $\int_a^\infty |f(x)|^p\,dx < \infty$ gilt $(p = 1,2)$, und entsprechend für eine matrixwertige Funktion $R(.) \in L_1$, falls $R_{ij}(.) \in L_1\ \forall\, i,j$ gilt.

Die Notation $f(x) \approx g(x)$ drückt aus, daß ein $a \geq 0$ und Konstante $c_i = c_i(a) > 0$ existieren mit $c_1\,|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2\,|g(x)| \quad \forall x \in [a,\infty)$ ($f = O(g)$ und $g = O(f)$).

Hängt f zusätzlich noch von einem Parameter $z = \lambda + i\epsilon$ ab, mit $(\lambda,\epsilon) \in L_0 := A \times [0,\delta)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ und $0 < \delta$ klein, so schreiben wir entsprechend

$f(x,z) \approx g(x)$, falls ein $a = a(L_0) \geq 0$ und Konstante $c_i = c_i(a) > 0$ existieren mit $c_1\,|g(x)| \leq |f(x,z)| \leq c_2\,|g(x)| \quad \forall x \in [a,\infty)$ und $z \in L_0$ (die Konstanten hängen zwar von L_0, nicht jedoch von z ab). Dementsprechend notieren wir $f(x,z) = o(g(x))$, falls $g(x) \neq 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x,z)/g(x) = 0$ gleichmäßig in z gilt.

Wenn die Argumentabhängigkeit aus dem Zusammenhang hervorgeht, werden wir sie aus Darstellungsgründen (oft) nicht angeben, d.h. wir schreiben f an Stelle von $f(x,z)$ bzw. $f(x)$. Das Symbol $'$ bezeichnet wie üblich die Ableitung d/dx.

Kapitel 2

Hamilton Systeme und Spektraltheorie

2.1 Selbstadjungierte Realisierungen

Wir werden nun die Spektraltheorie von (1.2) im allgemeineren Rahmen von Hamilton Systemen [5, 34, 36] studieren: Einerseits hat Walker [64] gezeigt, daß sich jede formal selbstadjungierte gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $2n$, also insbesondere (1.2), als lineares Hamilton System schreiben läßt. Andererseits können wir dann die für dieses System entwickelte Theorie der M–Matrix nutzen, welche Informationen über das Spektrum s.a. Hamilton-Operatoren liefert (siehe die nächsten beiden Abschnitte).

Unter einem Hamilton System verstehen wir gewöhnliche Differentialgleichungssysteme der Form

$$J\,\vec{u}\,'(x) = [zA(x) + B(x)]\,\vec{u}(x)\,, \qquad x \in [a, \infty) \tag{2.1}$$

mit

$$J := \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}, \qquad A(x) := \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

$A(x), B(x)$ resp. $A_1(x)$ bezeichnen komplexwertige $2n \times 2n$ resp. $s \times s$ Matrixfunktionen, welche (f.ü.) selbstadjungiert und lokal integrierbar sind, $\vec{u}(x)$ eine $2n \times 1$

Vektorfunktion. $A_1(x)$ ist (f.ü.) positiv definit, z ein komplexer Parameter und 1_n steht für die $n \times n$ Einheitsmatrix. Nach diesen Voraussetzungen besitzt (2.1) bei gegebenen Anfangswerten eine eindeutige Lösung [66, Satz 2.1]. Wir benutzen folgende Notationen:

$\mathcal{H}_A$ bezeichnet den Hilbertraum der Äquivalenzklassen meßbarer C^s-wertiger Funktionen mit $\int_a^\infty f^*(x)A_1(x)f(x)\,dx < \infty$ und zugehörigem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{A_1} := \int_a^\infty f^*(x)A_1(x)g(x)\,dx\,, \qquad f,\, g \in \mathcal{H}_A\,,$$

$L^2_A[a,\infty)$ den Vektorraum meßbarer C^{2n}-wertiger Funktionen mit

$$\int_a^\infty f^*(x)A(x)f(x)\,dx < \infty$$

und Semiskalarprodukt $\langle .,.\rangle_A$, sowie P_s die Projektion auf die ersten s Komponenten eines C^{2n}-Vektors. Der Begriff quadratintegrierbar steht für Vektoren aus $L^2_A[a,\infty)$.

Nach Walker können formal s.a. Differentialgleichungen mit Hilfe von Quasiableitungen in ein lineares Hamilton System überführt werden. In diesem Formalismus lassen sich die letzten $2n-s$ Komponenten von $\vec{u}$ aus den ersten s Komponenten (sowie derer Quasiableitungen) eindeutig durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0_s & 0 \\ 0 & 1_{2n-s} \end{pmatrix} (J\,\vec{u}\,' - B(x)\,\vec{u}) = 0 \tag{2.3}$$

berechnen (diese formale Aussage wird am Ende dieses Abschnitts an der uns interessierenden Situation von (1.2) illustriert; insbesondere ist nachfolgende Bedingung erfüllt).

Andererseits erfüllt offensichtlich jede Lösung von (2.1) diese Gleichung; damit nun im allgemeineren Rahmen von Hamilton Systemen der zu (2.1) gehörende formale Differentialausdruck τ_A,

$$\tau_A\,\vec{u} := \begin{pmatrix} A_1^{-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (J\,\vec{u}\,' - B(x)\,\vec{u})\,, \tag{2.4}$$

in $\mathcal{H}_A$ Operatoren D erzeugt, derart, daß jeder Lösung u von $D\,u = z\,u$ in eindeutiger Weise eine quadratintegrierbare Lösung $\vec{u}$ von (2.1) entspricht, fordern wir, daß die

Gleichung (2.3) eindeutig nach den letzten $2n - s$ Komponenten von $\vec{u}$ aufgelöst werden kann, und erklären den maximalen Operator T_A durch:

$$\begin{aligned} D_{T_A} \;:=\; & \{u \in \mathcal{H}_A : \exists\, \vec{u} \in L^2_A[a,\infty)\,,\ \text{deren letzten } (2n-s) \text{ Komponenten eindeu-} \\ & \qquad \text{tig bestimmt sind durch (2.3) mit} \quad (i)\ u = P_s\vec{u}, \\ & \qquad (ii)\ \vec{u} \text{ ist absolut stetig (jede Komponente) auf } [a,\infty), \\ & \qquad (iii)\ P_s\,\tau_A\,\vec{u} \in \mathcal{H}_A\}\,,\ T_A\,u := P_s\,\tau_A\,\vec{u} \ \text{ für } \ u \in D_{T_A}\,. \end{aligned}$$

Nun gilt: die ersten s Komponenten einer absolut stetigen, quadratintegrierbaren Lösung $\vec{u}$ von (2.1) liegen in $N(T_A - z)$ ($u := P_s\,\vec{u} \in D_{T_A}$ und $T_A u = zu$), und umgekehrt ist durch $u \in N(T_A - z)$ eine absolut stetige, quadratintegrierbare Lösung $\vec{v}$ von (2.1) gegeben, deren letzten $2n - s$ Komponenten eindeutig bestimmt sind durch die Gleichung (2.3): $\vec{v} := (u_1, \ldots, u_s, v_{s+1}, \ldots, v_{2n})$.

Nachdem nun der maximale Operator T_A definiert ist – alle weiteren durch τ_A erzeugten Operatoren sind Einschränkungen von T_A –, können wir die Theorie der s.a. Realisierungen in Analogie zu [66] entwickeln: Der minimale Operator T_0, sinngemäß erklärt wie im letzten Abschnitt, ist symmetrisch, und es gilt $T_0 = T_A^*$, $T_A = T_0^*$. Wir treffen die Voraussetzung, daß a ein regulärer Randpunkt ist und daß T_0 gleiche Defektzahlen γ besitzt (letzteres ist beispielsweise immer dann der Fall, wenn $A_1(x)$ und $B(x)$ reellwertig sind), und setzen dementsprechend

$$\gamma = n + r\,, \quad 0 \le r \le n\,. \tag{2.5}$$

T_0 besitzt also s.a. Fortsetzungen; ein wichtiges Hilfsmittel in der Konstruktion solcher Fortsetzungen ist die Greensche Formel: Für $u, v \in D_{T_A}$ und $b < \infty$ gilt

$$\int_a^b [\vec{u}^*(x)A(x)\tau_A\,\vec{v}(x) - (\tau_A\,\vec{u}(x))^*A(x)\,\vec{v}(x)]\,dx = \vec{u}^*(x)J\vec{v}(x)|_a^b \tag{2.6}$$

mit $\vec{u}^*(x)J\vec{v}(x)|_a^b = \vec{u}^*(b)J\vec{v}(b) - \vec{u}^*(a)J\vec{v}(a)$. Die Greensche Formel zeigt, daß $\forall u, v \in D_{T_A}$ der Limes $\lim_{x\to\infty} \vec{u}^*(x)\,J\,\vec{v}(x)$ existiert (a ist regulär); eine Anwendung von [66, Satz 3.12] führt auf

Lemma 2.1 $D_{T_0} = \{u \in D_{T_A} : \vec{u}(a) = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} \vec{v}^*(x)\,J\,\vec{u}(x) = 0\ \forall v \in D_{T_A}\}$.

Wir interessieren uns für die s.a. Realisierungen von T_0 mit getrennten Randbedingungen: Am regulären Randpunkt a sind diese gegeben durch (vgl. [35])

$$(\alpha_1,\, \alpha_2)\, \vec{u}(a) = 0\,, \tag{2.7}$$

wobei α_1, α_2 komplexwertige $n \times n$-Matrizen bezeichnen mit Rang $(\alpha_1,\, \alpha_2) = n$ und

$$\alpha_1 \alpha_1^* + \alpha_2 \alpha_2^* = 1_n, \quad \alpha_1 \alpha_2^* - \alpha_2 \alpha_1^* = 0_n\,. \tag{2.8}$$

Im minimalen Defektfall ($\gamma = n$) ist in ∞ keine Randbedingung erforderlich, da in diesem Fall nach [66, Satz 4.8] gilt: $\lim_{x\to\infty} \vec{u}^*(x)\, J\, \vec{v}(x) = 0\ \forall u, v \in D_{T_A}$. Für $r \geq 1$ hingegen ist eine zusätzliche Randbedingung in ∞ erforderlich:

Satz 2.2 *Die selbstadjungierten Fortsetzungen S von T_0 mit getrennten Randbedingungen sind gegeben durch*

$$D_S = \{u \in D_{T_A} : (\alpha_1, \alpha_2)\vec{u}(a) = 0 \text{ und } \lim_{x\to\infty} \vec{w_j}^*(x)\, J\, \vec{u}(x) = 0\,,\ 1 \leq j \leq r\}\,, \tag{2.9}$$

- *wobei (α_1, α_2) die Bedingung (2.8) erfüllen,*
- *die Funktionen $w_j \in D_{T_A}$ linear unabhängig sind modulo D_{T_0} bei ∞ und für hinreichend große $x \geq c$ als $L^2_{A_1}[c, \infty)$-Lösungen von $P_s(\tau_A \vec{w} - z\vec{w}) = 0$, $Im\ z \neq 0$, gewählt werden können mit*
- $\lim_{x\to\infty} \vec{w_j}^*(x)\, J\, \vec{w_k}(x) = 0$ *für $1 \leq j,\, k \leq r$.*

Die Funktionen w_j heißen linear unabhängig modulo D_{T_0} bei ∞, wenn keine nichttriviale Linearkombination der entsprechend modifizierten Funktionen $w_{j,\infty}$, die in einer Umgebung von a identisch Null sind und für hinreichend große x mit den w_j übereinstimmen, in D_{T_0} liegt.

Beweis: Analog zu den Beweisen von [66, Sätze 4.6, 4.11, 5.4, 5.5]. $\square$

Abschließend bringen wir die Differentialgleichung (1.2), $(r\,y'')'' - (py')' + qy = z\,w\,y$, mit Hilfe der Quasiableitungen (vgl. [66])

$$y^{[0]} := y\,,\ y^{[1]} := y'\,,\ y^{[2]} := ry''\,,\ y^{[3]} := py' - (ry'')'$$

auf Hamilton Form, indem wir sie als System 1.Ordnung, $\vec{u}\,' = C(x,z)\,\vec{u}$, schreiben mit

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} y^{[0]} \\ y^{[1]} \\ y^{[3]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ q_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_w := q - zw\,. \tag{2.10}$$

Mit diesen Definitionen ist die Gleichung $\vec{u}\,' = C(x,z)\,\vec{u}$ äquivalent zu (2.1) mit $n = 2$, $A_1(x) = w(x)$ und

$$B = \begin{pmatrix} -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

In diesem Fall erhalten wir also die alten Definitionen aus dem letzten Abschnitt zurück: $\mathcal{H}_A = L_2([0,\infty); w\,dx)$, $P_s\,\tau_A = \tau$ und $T_A = T$.

2.2 M–Matrix

Jedem s.a. Operator eines Sturm-Liouville Ausdrucks im Hilbertraum $L_2[a,\infty)$ (a regulär und minimaler Defekt: $\gamma_{+,-} = 1$) ist für $Im\ z \neq 0$ in eindeutiger Weise die so genannte Titchmarsh-Weyl m-Funktion zugeordnet: $m = m(z)$ ist eine Herglotzfunktion, welche mittels der Stieltjes-Umkehrformel ein dem Operator zugeordnetes Spektralmaß liefert (Titchmarsh–Kodaira Formel, [38, Satz 5.4]).

Ihr Analogon auf der Ebene von Hamilton Systemen ist die M-Matrix, die u.a. in [5, 34, 35, 36, 37, 52, 39] untersucht wurde. Ihre Eigenschaften (Existenz, Eindeutigkeit, Zusammenhang zur Spektraldarstellung s.a. Realisierungen) sowie die Resolvente sind also die Themen dieses Abschnitts.
Wir bemerken vorbereitend: für jede nichttriviale quadratintegrierbare Lösung $\vec{u}$ von (2.1) gilt $\int_a^\infty \vec{u}^*(x)A(x)\vec{u}(x)\,dx > 0$ (nach Voraussetzung gilt $A_1(x) > 0$ und die letzten $2n - s$ Komponenten einer Lösung von (2.1) sind eindeutig bestimmt durch

(2.3)) und benutzen die Notation:
$Y(.,z) := (\Theta(.,z), \Phi(.,z))$ bezeichnet die Fundamentalmatrix von (2.1) mit Anfangswert

$$Y(a,z) := \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\alpha_2^* \\ \alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix}, \quad \alpha_1,\, \alpha_2 \text{ erfüllen (2.8)}. \tag{2.12}$$

Θ, Φ sind komplexwertige $2n \times n$ Matrizen; da die Spalten von $Y(a,z)$ linear unabhängig sind, spannen die Spalten von $Y(.,z)$ den $2n$-dimensionalen Vektorraum der Lösungen von (2.1) auf. Offensichtlich erfüllt $\Phi(.,z)$ die s.a. Randbedingung in a.

Im minimalen Defektfall ($\gamma = n$) sind die s.a. Realisierungen durch die Randbedingungen (2.7) in a bestimmt: Fixieren wir nun eine derartige Randbedingung durch $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, so ist (siehe z.B. [36, Satz 3.1]) die M-Matrix $M_\alpha(z) \in \mathbf{C}^{n\times n}$ für Im $z \neq 0$ eindeutig definiert durch die Forderung

$$\chi_M(x,z) := Y(x,z) \begin{bmatrix} 1_n \\ M_\alpha(z) \end{bmatrix} \in L^2_A[a,\infty).$$

Für Im $z \neq 0$ ist $M(z)$ analytisch, Im $M(z)$ in der oberen Halbebene positiv definit und die Spalten von $\chi_M(.,z)$ bilden eine Basis der quadratintegrierbaren Lösungen von (2.1).

Im Defektfall $n + r$ ($r \geq 1$) sind nach Satz 2.2 zusätzliche Randbedingungen in ∞ erforderlich. Hinton und Schneider [34, Satz 4.1] haben mit Hilfe entsprechender s.a. getrennter Randbedingungen (in a und ∞) gezeigt, daß auch im Defektfall $n + r$ für Im $z \neq 0$ jeder s.a. Realisierung genau eine M-Matrix $M(z)$ entspricht. Diese Untersuchungen werden im allgemeineren Rahmen (und damit einhergehendem komplexeren Formalismus) von S-hermiteschen Systemen (vgl. [56, 57, 45, 46]) durchgeführt, so daß wir den Beweis hier nochmals aufbereiten.
Wir orientieren uns dabei eng an [34] und definieren entsprechend:

$$F(z) := \{f \in \mathbf{C}^{2n} :\ Y_z\, f \in L^2_A[a,\infty)\}\,, \quad \text{Im } z \neq 0\,,$$

$$R_\infty := \{u \in D_{T_A} :\ (\vec{v}^*\, J\, \vec{u})(\infty) = 0\, \forall v \in D_{T_A}\}.$$

Dabei ist $Y_z := Y(.,z)$, und $(\vec{v}^*\, J\, \vec{u})(\infty)$ bezeichnet für $u, v \in D_{T_A}$ den Limes $\lim_{x\to\infty} \vec{v}^*(x)\, J\, \vec{u}(x)$.

Nach Voraussetzung gilt dim $F(z) = \gamma = n + r$, und nach [57, Satz 6.23] gilt dim $D_{T_A}/R_\infty = 2r$. Wir bemerken, daß die Funktionen w_j aus Satz 2.2 linear unabhängig sind modulo R_∞: Aus $\sum_1^r \gamma_j\, w_j \in R_\infty$ folgt $\sum_1^r \gamma_j\, w_{j,\infty} \in D_{T_0}$, also $\gamma_1 = \ldots = \gamma_r = 0$. Als letzte Vorbereitung beweisen wir:

Lemma 2.3 *Sei* $D_{\widetilde{T}} := \{u \in D_{T_A} : (\vec{w}_j^{\,*}\, J\, \vec{u})(\infty) = 0\,,\ 1 \le j \le r\}\,,\ \widetilde{T}u = T_A u$ *und*

$$C(z) := \{f \in F(z) : (\vec{w}_j^{\,*}\, J\, Y_z\, f)(\infty) = 0\,,\ 1 \le j \le r\}\,, \quad Im\ z \ne 0\,.$$

Dann gilt
(i) $D_{\widetilde{T}} = R_\infty \dot{+} L(w_1, \ldots, w_r)\,,$
(ii) $\widetilde{T}^*$ *besitzt die Defektzahlen* (n, n)*, d.h. dim* $C(z) = n$ *und*
(iii) $[(Y_{z_1} g)^*\, J\, Y_{z_2}\, f](\infty) = 0$ *für* $f \in C(z_2),\ g \in C(z_1)$.

Beweis: (vgl. [34, 57])
(i): Nach Voraussetzung gilt $R_\infty \dot{+} L(w_1, \ldots, w_r) \subset D_{\widetilde{T}}$. Da die w_j linear unabhängig sind modulo R_∞, reicht es also zu zeigen: dim $D_{\widetilde{T}}/R_\infty \le r$. Die Funktionen w_j sind linear unabhängig modulo D_{T_0} bei ∞, also sind die linearen Funktionale $W_j : D_{T_A} \to \mathbf{C}$ mit $W_j(u) := (\vec{w}_j^{\,*}\, J\, \vec{u})(\infty)$ $(1 \le j \le r)$ auf D_{T_A} linear unabhängig und somit auch auf $D_{T_A}/D_{\widetilde{T}}$; also gilt dim $D_{T_A}/D_{\widetilde{T}} =$ dim $\left(D_{T_A}/D_{\widetilde{T}}\right)^* \ge r$ und somit dim $D_{\widetilde{T}}/R_\infty =$ dim $D_{T_A}/R_\infty -$ dim $D_{T_A}/D_{\widetilde{T}} \le 2r - r = r$ ($*$ bezeichnet den Dualraum).
(ii): Offensichtlich gilt für s.a. Erweiterungen H von T_0: $T_0 \subset \widetilde{T}^* \subset H \subset \widetilde{T} \subset T_A$; T_A ist eine $(n+r)$-dimensionale Erweiterung von H und nach (i) eine r-dimensionale Erweiterung von $\widetilde{T}$ (dim $D_{T_A}/R_\infty = 2r$), also ist $\widetilde{T}$ eine n-dimensionale Erweiterung von H.
(iii): Sei $f \in C(z_2)$, also $P_s\,(Y_{z_2}\, f) \in D_{\widetilde{T}} : Y_{z_2}\, f = \vec{u} + \sum_1^r a_j\, \vec{w}_j$ mit $u \in R_\infty$. Entsprechend gilt für $g \in C(z_1)$: $Y_{z_1}\, g = \vec{v} + \sum_1^r b_j\, \vec{w}_j$ mit $v \in R_\infty$. Es folgt die Behauptung.
□
Wir können nun [34, Satz 4.1] zeigen:

Satz 2.4 $\forall z \in \mathbf{C}$ *mit* $Im\ z \ne 0$ *existiert genau eine reguläre* $n \times n$*-Matrix* $M = M(z)$ *mit* *(i) die Spalten von* $\chi_M(.,z) := \Theta(.,z)+\Phi(.,z)\,M(z)$ *sind quadratintegrierbare Lösungen von* (2.1),

(ii) $\lim_{x\to\infty} \vec{w}_j^{\,*}(x)\,J\,\chi_M(x,z) = 0\,,\ 1 \le j \le r\,,$ *die Funktionen* w_j *aus* Satz 2.2,

(iii) $\lim_{x\to\infty} \chi_M(x,z_1)^*(x)\,J\,\chi_M(x,z_2) = 0\ \forall Im\ z_1,\ Im\ z_2 \neq 0$, *wobei* $(\Theta(.,z),\Phi(.,z))$ *die Fundamentalmatrix von* (2.1) *bezeichnet mit Anfangswert* (2.12).

Beweis: (nach [34])

Sei $z \in \mathbf{C}$ beliebig, aber fest gewählt mit $Im\ z \neq 0$; nach Lemma 2.3 existiert eine Basis $\{f_i(z):\ f_i \in \mathbf{C}^{2n}\,,\ 1 \le i \le n\}$ von

$$C(z) = \{f \in F(z) : (\vec{w}_j^{\,*}\,J\,Y_z\,f)(\infty) = 0\,,\ 1 \le j \le r\}\,.$$

$Y(.,z)$ bezeichnet hierbei die Fundamentalmatrix von (2.1) mit Anfangswert 1_{2n}; nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt

$$Y(.,z) = (\Theta(.,z),\Phi(.,z))(\Theta(a,z),\Phi(a,z))^{-1}\,.$$

Es gibt also eine $2n\times n$-Matrix $B(z) = (B_1(z),B_2(z))^t$ mit

$$Y(.,z)\,(f_1(z),\ldots,f_n(z)) = \Theta(.,z)\,B_1(z) + \Phi(.,z)\,B_2(z) =: U(.,z)\,.$$

Die Aufgabe besteht nun darin zu zeigen, daß $M(z)$ gegeben ist durch $B_2(z)\,B_1^{-1}(z)$.
Zunächst stellen wir fest:

(1) Rang $(B_1(z),\ B_2(z))^t = n$ und

(2) die Spalten von $U(.,z)$ sind quadratintegrierbare Lösungen von (2.1) mit

(3) $(\vec{w}_j^*\,J\,U_z)(\infty) = 0\ (1 \le j \le r)$; nach Lemma 2.3 gilt

(4) $(U_{z_1}^* J U_{z_2})(\infty) = 0$ für $Im\ z_i \neq 0$.

Wir zeigen nun durch einen indirekten Beweis: $B_1(z)$ ist regulär. Hierzu sei $g \in \mathbf{C}^n$ mit $B_1(z)g = 0$. Dann ist

$$\vec{v}(.,z) := U(.,z)g = \Phi(.,z)\,B_2(z)g$$

eine quadratintegrierbare Lösung mit $(\vec{v}^*J\vec{v})(\infty) = (\vec{v}^*J\vec{v})(a) = 0$ (benutze (4) und Anfangswert $\Phi(a,z)$); die Greensche Formel (2.6) zeigt

$$0 = <\vec{v},\tau_A\,\vec{v}>_A - <\tau_A\,\vec{v},\vec{v}>_A = 2\,i\,\mathrm{Im}\,z\int_a^\infty \vec{v}^*(x)A(x)\vec{v}(x)\,dx$$

und somit $\vec{v}(.,z) \equiv 0$, also $0 = (-\alpha_2, \alpha_1)\vec{v}(a,z) = B_2(z)g = B_1(z)g$. Mit (1) folgt $g = 0$: $B_1(z)$ ist regulär. Eine analoge Argumentation zeigt die Regularität von $B_2(z)$. Nun sei $M(z) := B_2(z)\, B_1^{-1}(z)$; wegen $\chi_M(.,z) := \Theta(.,z) + \Phi(.,z)\, M(z) = U(.,z)\, B_1^{-1}(z)$ folgen die Eigenschaften (i) – (iii) aus (2) – (4).

Bleibt also die Eindeutigkeit zu zeigen; seien $M_1(z)$, $M_2(z)$ $n \times n$-Matrizen, die (i) und (ii) erfüllen, $g \in \mathbf{C}^n$ beliebig und

$$\vec{u}(.,z) := [\chi_{M_1}(.,z) - \chi_{M_2}(.,z)]g = \Phi(.,z)\,[M_1(z) - M_2(z)]g\,.$$

Nach Voraussetung ist $\vec{u}$ eine quadratintegrierbare Lösung mit $(\vec{w}_j^*\, J\, \vec{u})(\infty) = 0$; wegen $(\Theta(.,z), \Phi(.,z)) = Y(.,z)(\Theta(a,z), \Phi(a,z))$ folgt also $\vec{u}(.,z) = Y(.,z)f$ mit $f \in C(z)$ und somit nach Lemma 2.3: $(\vec{u}^* J \vec{u})(\infty) = 0$. Wegen des Anfangswertes $\Phi(a,z)$ gilt $\vec{u}^*(a,z) J \vec{u}(a,z) = 0$, und mit der Greenschen Identität folgt $\vec{u}(.,z) \equiv 0$, also $0 = (-\alpha_2, \alpha_1)\vec{u}(a,z) = [M_1(z) - M_2(z)]g = 0$ für beliebiges $g \in \mathbf{C}^n$: $M_1(z) = M_2(z)$. □

Korollar 2.5 *Für $Im\; z_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ gilt*

$$M(z_1) - M^*(\overline{z}_2) = (z_1 - z_2) \int_a^\infty \chi_M^*(x, \bar{z}_2)\, A(x)\, \chi_M(x, z_1)\, dx\,,$$

also gilt für $Im\; z \neq 0$: $M^*(\overline{z}) = M(z)$ und

$$\int_a^\infty \chi_M^*(x,z)\, A(x)\, \chi_M(x,z)\, dx = \frac{Im\; M(z)}{Im\; z}\,,$$

wobei $Im\; M := (M - M^*)/2\,i$.

Beweis:

Die Spalten von $\chi_M(.,z_i)$ sind quadratintegrierbare Lösungen von (2.1), also folgt mit der Greenschen Formel (2.6) und Satz 2.4(iii):

$$(z_1 - z_2) \int_a^\infty \chi_M^*(x, \bar{z}_2)\, A(x)\, \chi_M(x, z_1)\, dx = -\chi_M^*(a, \bar{z}_2)\, J\, \chi_M(a, z_1)\,;$$

Einsetzen der Anfangswerte $\Theta(a, z_i)$, $\Phi(a, z_i)$, gegeben durch (2.12), zeigt die erste Behauptung, aus welcher die letzten beiden Behauptungen offensichtlich folgen. □

Somit ist $M(z)$ für $Im\; z > 0$ positiv definit; die Holomorphie werden wir (leicht) mit Hilfe der Resolvente einer beliebig, aber fest gewählten s.a. Erweiterung H von

T_0 nachweisen. Hierzu bemerken wir zunächst, daß die Lösungen des inhomogenen Problems

$$J\,\vec{y}\,' = [zA(x) + B(x)]\,\vec{y} + A(x)\,\vec{f}(x) \tag{2.13}$$

mit $\vec{f}(.) \in L_{1,lok}[a,\infty)$ gegeben sind durch:

Lemma 2.6 (Variation der Konstanten) *Die inhomogene Gleichung* (2.13) *mit Anfangswert* $\vec{y}(a) = \vec{y}_a \in \mathbf{C}^{2n}$ *besitzt die eindeutige Lösung*

$$\vec{y}(x,z) = Y(x,z)\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\vec{y}_a - J\int_a^x Y^*(t,\bar{z})\,A(t)\,\vec{f}(t)\,dt\right]. \tag{2.14}$$

$Y(.,z)$, $Y(.,\bar{z})$ *bezeichnen die Fundamentalmatrizen des homogenen Problems* (2.1) *mit Anfangswert* (2.12)*:* $Y(a,\bar{z}) = Y(a,z)$.

Beweis:

Variation der Konstanten bestimmt die allgemeine Lösung zu

$$\vec{y}(x,z) = Y(x,z)\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\vec{y}_a + \int_a^x Y^{-1}(t,z)\,J^{-1}\,A(t)\,\vec{f}(t)\,dt\right].$$

Sind $\vec{u} = \vec{u}(x,z_1)$ und $\vec{v} = \vec{v}(x,z_2)$ Lösungen von (2.1), so gilt $\frac{d}{dx}(\vec{u}^*\,J\,\vec{v}) = (z_2 - \bar{z}_1)\vec{u}^*\,A\,\vec{v}$. Der Anfangswert liefert dann $Y^*(x,z)\,J\,Y(x,\bar{z}) \equiv J$, und aus ihr folgt die Beziehung $Y^{-1}(x,z)\,J^{-1} = -J\,Y^*(x,\bar{z})$. Die Eindeutigkeit folgt nach [66, Satz 2.1]. $\square$

Für $\mathrm{Im}\,z \neq 0$ und $\vec{f}(.) \in L^2_A[a,\infty)$ erhalten wir folgende Darstellung der Resolvente:

Lemma 2.7 *Die Resolvente einer beliebigen s.a. Erweiterung H von T_0 ist gegeben durch*

$$((H-z)^{-1}\,P_s\,\vec{f})(x) = P_s\int_a^\infty G(x,t,z)A(t)\vec{f}(t)dt \tag{2.15}$$

mit

$$G(x,t,z) := \begin{cases} \chi_M(x,z)\Phi^*(t,\bar{z})\,, & t < x \\ \Phi(x,z)\chi_M^*(t,\bar{z})\,, & t > x\,. \end{cases}$$

Beweis:

Seien $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\vec{f}(.) \in L^2_A[a,\infty)$ und $\vec{u}(x,z,\vec{f}) := \int_a^\infty G(x,t,z)A(t)\vec{f}(t)dt =$

$$= \chi_M(x,z)\int_a^x \Phi^*(t,\bar{z})A(t)\vec{f}(t)\,dt + \Phi(x,z)\int_x^\infty \chi_M^*(t,\bar{z})A(t)\vec{f}(t)\,dt\,.$$

Da die Spalten von χ_M quadratintegrierbar sind, ist $\vec{u}(.,z,\vec{f})$ für jedes $x \in [a,\infty)$ definiert. Wegen $M(z) = M^*(\bar{z})$ gilt

$$G(x,t,z) = \begin{cases} Y(x,z)\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 0_n & M(z) \end{pmatrix} Y^*(t,\bar{z})\,, & t < x \\ Y(x,z)\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 1_n & M(z) \end{pmatrix} Y^*(t,\bar{z})\,, & t > x\,. \end{cases}$$

$G(.,.,z)$ ist für $t \neq x$ stetig in (x,t), macht in $t = x$ einen Sprung um J (aus $Y(x,z)J$ $Y^*(x,\bar{z}) = J$ folgt für festes (x,z): $\lim_{\delta\to 0+} G(x,x+\delta,z) - G(x,x-\delta,z) = J$) und erfüllt als Funktion von x die s.a. Randbedingung in $x = a$: $\vec{u}$ ist also absolut stetig, erfüllt die s.a. Randbedingung in a und löst die inhomogene Gleichung (2.13).

Ist nun $\vec{f}(.) \in L^2_A$ eine Funktion mit kompaktem Träger in (a,∞), so ist $\vec{u}(.,z,\vec{f})$ offensichtlich quadratintegrierbar und erfüllt die s.a. Ranbedingung in ∞ (für hinreichend großes x gilt $\vec{u}(x,z,\vec{f}) = \chi_M(x,z)\,g$ mit $g \in \mathbf{C}^n$; nun benutze Satz 2.4 (ii)); also gilt $P_s\vec{u} \in D_H$. Da der Operator $(H-z) : D_H \to \mathcal{H}_A$ bijektiv ist, haben wir also gezeigt, daß die Einschränkung der Resolvente auf die Menge der Funkionen mit kompaktem Träger gegeben ist durch (2.15); diese Einschränkung bezeichnen wir mit R_0.

Die Abschließung des beschränkten Operators R_0 ist die (eindeutig bestimmte) Resolvente $\overline{R}_0 = (H-z)^{-1}$, und der Graph ist gegeben durch $G(\overline{R}_0) = \overline{G(R_0)}$.

Ist nun $f = P_s\vec{f} \in \mathcal{H}_A$ beliebig, so ist also zu zeigen, daß $\forall (f,g) \in \overline{G(R_0)}$ gilt: $g = P_s\vec{u}(.,z,\vec{f})$: Sei $(f,g) \in \overline{G(R_0)}$; dann existiert eine Folge $\{f_n\}$ in D_{R_0} mit $(f_n, R_0 f_n) \to (f,g)$ (Graphennorm), also $f_n \to f$ und $R_0\,f_n \to g$ (Konvergenz in $||.||_{A_1}$). Es gibt also eine Teilfolge mit $(R_0 f_{n_j})(x) \to g(x)$ (f.ü.) auf $[a,\infty)$. Andererseits konvergiert $(R_0 f_n)(x) = P_s\vec{u}(x,z,\vec{f}_n)$ punktweise gegen $P_s\vec{u}(x,z,\vec{f})$ (für festes x sind die Spalten von $G(x,.,z)$ quadratintegrierbar), also gilt (f.ü.) auf $[a,\infty)$: $g(x) = P_s\vec{u}(x,z,\vec{f})$. $\square$

Lemma 2.9 aus dem nächsten Abschnitt zeigt nun die Holomorphie von $M(z)$:

$M(z)$ ist eine Nevanlinna-Matrix, d.h. $M(.)$ ist analytisch in der oberen (unteren) Halbebene mit Im $M(z) > 0$ (Im $M(z) < 0$): $M(z)$ besitzt eine Herglotzdarstellung (deren explizite Form in Lemma 2.10 angegeben ist) mit einer eindeutig bestimmten matrixwertigen nichtfallenden Funktion $\rho(t)$, deren Komponenten rechtsseitig stetig sind in $\mathbb{R}$. ρ ist ein Spektralmaß von H, d.h. es gibt eine unitäre Transformation $U : \mathcal{H}_A \to L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ mit $U\,H\,U^* = T_{id}$; H ist also unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator T_{id} im Raum $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$: $(U\,H\,U^*\,g)(x) = x\,g(x)$.
Das Maß ρ kann mit Hilfe der Stieltjes-Umkehrformel aus M als schwacher Limes (Integration gegen Funktionen mit kompaktem Träger) zurückgewonnen werden:

$$d\rho(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{\epsilon\to 0^+}\, Im\ M(t + i\,\epsilon)\,dt\,. \tag{2.16}$$

Wechselt man nun die Randbedingung in a von α zu $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, d.h. β erfüllt Voraussetzung (2.8) und die Fundamentalmatrix besitzt den Anfangswert $Y(a, z) = Y(a, z, \beta)$, so gilt [37]

$$M_\beta(z) = (-\gamma_2 + \gamma_1\,M_\alpha(z))\,(\gamma_1 + \gamma_2\,M_\alpha(z))^{-1} \tag{2.17}$$

mit $\gamma_1 = \beta_1\,\alpha_1^* + \beta_2\,\alpha_2^*$, $\gamma_2 = \beta_2\,\alpha_1^* - \beta_1\,\alpha_2^*$.

2.3 Spektrale Vielfachheiten und singulär stetiges Spektrum

Remling hat in [52, Satz 5.1] in der Defektsituation $\gamma = n$ (minimaler Defekt) eine sehr wichtige Aussage über die spektrale Vielfachheit des stetigen Spektrums nachweisen können:

Satz 2.8 *Sei dim $N(T_A - \lambda) \geq s\ \forall\lambda \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ eine reelle Borelmenge. Dann ist die Vielfachheit des stetigen Spektrums in $\mathcal{B}$ einer beliebigen s.a. Realisierung höchstens $n - s$.*

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß der Satz auch in der allgemeineren Defektsituation $\gamma = n + r$ $(r \geq 0)$ richtig ist. Hierzu erinnern wir an den Operator $\widetilde{T} \subset T_A$:

$$D_{\widetilde{T}} = \{u \in D_{T_A} : \lim_{x\to\infty} \vec{w}_j^{\,*}(x)\,J\,\vec{u}(x) = 0\,,\ 1 \leq j \leq r\}\,,\ \widetilde{T}\,u = T_A\,u.$$

Für s.a. Erweiterungen H von T_0 gilt $T_0 \subset \widetilde{T}^* \subset H \subset \widetilde{T} \subset T_A$ und nach Satz 2.2 gilt $H = H_\alpha$ mit

$$D_{H_\alpha} = \{u \in D_{\widetilde{T}} : (\alpha_1, \alpha_2)\vec{u}(a) = 0\}\,, \tag{2.18}$$

wobei α_1, α_2 die Bedingung (2.8) erfüllen. Nach Lemma 2.3 besitzt $\widetilde{T}^*$ die Defektzahlen (n, n), und nach Satz 2.4 bildet $\chi_{M_\alpha}(.,z)$ für Im $z \neq 0$ eine Basis von $N(\widetilde{T} - z)$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Beweisstrategie aus [52] auch auf den Operator $\widetilde{T}$ angewendet werden kann:

Lemma 2.9 *Für $Im\ z \neq 0$ gilt*

$$M_\alpha(z) = Re\ M_\alpha(i) + z||\chi_{M_\alpha}(.,i)||^2 + (z^2+1)\langle \chi_{M_\alpha}(.,i), (H_\alpha - z)^{-1}\chi_{M_\alpha}(.,i)\rangle.$$

$||\chi_{M_\alpha}(.,i)||^2$ ist eine $n \times n$-Matrix mit $(||\chi_M||^2)_{kl} := \langle P_s(\chi_M)_k, P_s(\chi_M)_l\rangle_{A_1}$, wobei $(\chi_M)_k$ die k-te Spalte von χ_M bezeichnet, und entsprechend gilt für $R := \langle \chi_M, (H_\alpha - z)^{-1}\chi_M\rangle$: $R_{kl} = \langle P_s(\chi_M)_k, (H_\alpha - z)^{-1}P_s(\chi_M)_l\rangle_{A_1}$.

Beweis: Sei $Im\ z_i \neq 0,\ i = 1, 2$. Wie in der Formulierung der Aussage arbeiten wir mit Matrizen (wo Spalten gemeint sind), unterdrücken die Projektion P_s und lassen den Index α weg (die Randbedingung in a ist fest gewählt).
Wir benutzen Satz 2.4: $\chi_M(.,z_1) - \chi_M(.,z_2) \in D_H$ und $\chi_M(.,z_i) \in N(\widetilde{T} - z_i)$. Es folgt $(H - z_1)\,[\chi_M(.,z_1) - \chi_M(.,z_2)] = (z_1 - z_2)\,\chi_M(.,z_2)$, also

$$(H - z)^{-1}\chi_M(.,i) = \frac{\chi_M(.,z) - \chi_M(.,i)}{z - i}\,. \tag{2.19}$$

Nach Korollar 2.5 gilt

$$\langle \chi_M(z_1), \chi_M(z_2)\rangle_A = \frac{M^*(z_1) - M(z_2)}{\overline{z}_1 - z_2}\,. \tag{2.20}$$

Nun rechne mit (2.19) und (2.20) nach. □
Lemma 2.9 zeigt insbesondere die Holomorphie von $M(z)$ für Im $z \neq 0$.

Lemma 2.10 *Für $Im\ z \neq 0$ besitzt $M_\alpha(z)$ die Herglotzdarstellung*

$$M^\alpha_{kl}(z) = Re\ M^\alpha_{kl}(i) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2}\right) d\rho^\alpha_{kl}(t)$$

mit $\rho^\alpha_{kl}(t) = (1 + t^2)\langle (\chi_M)^\alpha_k, E(t)(\chi_M)^\alpha_l\rangle_A$, $(\chi_M)^\alpha_k = k$-te Spalte von $(\chi_M)_\alpha(.,i)$, und $E(.)$ bezeichnet die Spektralschar von H_α.

Beweis: Benutze Lemma 2.9, den Spektralsatz, die Polarisierungsidentität, sowie einfache algebraische Manipulationen. □

Wir erinnern an

Definition 2.11 *Sei T_0 ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit Defektindex $(1,1)$ (in einem beliebigen Hilbertraum), b_γ eine reelle Zahl, $0 \neq f_\gamma \in N(T_0^* - i)$ und $\gamma \in [0, 2\pi)$. Für jede s.a. Erweiterung H_γ von T_0 heißt dann*

$$M_\gamma^a(z) := b_\gamma + z||f_\gamma||^2 + (z^2+1)\langle f_\gamma, (H_\gamma - z)^{-1} f_\gamma \rangle$$

eine (abstrakte) M-Funktion von H_γ.

(Der Index a steht für abstrakt, zur Unterscheidung von der M-Matrix M.)

Mit dem Spektralsatz folgt dann unmittelbar, daß die abstrakte M-Funktion für $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ die (eindimensionale) Herglotzdarstellung aus Lemma 2.10 besitzt:

$$M_\gamma^a(z) = b_\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\rho_\gamma(t) \tag{2.21}$$

mit $\rho_\gamma(t) = (1+t^2)||E(t)f_\gamma||^2$; $E(.)$ bezeichnet also die Spektralschar von H_γ.

Nach [52, Satz 3.3] können $b = b(\gamma)$ und $f = f(\gamma)$ $(\gamma \in (0,\pi))$ so gewählt werden, daß die Transformationsformel

$$M_\gamma^a(z) = \frac{M_0^a(z) \cot\beta(\gamma) - 1}{M_0^a(z) + \cot\beta(\gamma)} \tag{2.22}$$

gilt mit $\cot\beta(\gamma) = ||f(0)||^2 \cot(\gamma/2) - b(0)$.

Dieses waren bereits die entscheidenden Zutaten zum Beweis von

Lemma 2.12 *Seien $u_j \in N(\tilde{T} - \lambda)$ linear unabhängig, $1 \leq j \leq s$ und λ reell, mit $L(\{u_j\}) \cap D_{H_\alpha} = \{0\}$ für eine s.a. Randbedingung α. Dann gibt es s linear unabhängige $\vec{w}_j \in C^n$ mit*

$$\vec{w}_j^{\,*}\, Im\; M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon)\vec{w}_j = O(\epsilon) \quad \text{für } \epsilon \to 0^+ .$$

Beweis: (vgl. [52, Lemma 4.1])

Sei $j \in \{1, \ldots, s\}$ beliebig, aber fest gewählt, $u := u_j \in N(\tilde{T} - \lambda)$ und definiere eine eindimensionale Erweiterung T' von H_α durch $D_{T'} := D_{H_\alpha} \dot{+} L(u)$. Dann gilt also $T_0 \subset \widetilde{T}^* \subset T'^* \subset H_\alpha \subset T' \subset \widetilde{T} \subset T_A$; H_α ist eine eindimensionale s.a. Erweiterung von T'^* und nach der von Neumann Theorie gilt $D_{T'} = D_{T'^*} \dot{+} L(f_i) \dot{+} L(f_{-i})$ mit $f_{\pm i} \in N(T' \mp i)$. Wählt man speziell $||f_i||_{A_1} = ||f_{-i}||_{A_1}$, so sind die s.a. Erweiterungen D_{H_γ} von T'^* gegeben durch $D_{H_\gamma} = D_{T'^*} \dot{+} L(f_i - e^{i\gamma} f_{-i})$.

Wir konzentrieren uns nun auf die beiden s.a. Erweiterungen $H_{\gamma_1} := H_\alpha$ und H_{γ_2} mit $D_{H_{\gamma_2}} := D_{T'^*} \dot{+} L(u)$ (vgl. [4, §105, Satz 3]: H_{γ_2} ist s.a.), sowie die zugehörigen abstrakten M-Funktionen M_α^a bzw. $M_{\gamma_2}^a$. Die Herglotzdarstellung (2.21) führt zusammen mit der Voraussetzung (u ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von H_{γ_2}) auf $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon\, M_{\gamma_2}^a(\lambda + i\,\epsilon) = i\rho_{\gamma_2}(\{\lambda\}) > 0$, also $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon\, \mathrm{Im}\, M_{\gamma_2}^a(\lambda + i\epsilon) = \rho_{\gamma_2}(\{\lambda\}) > 0$. Mit Hilfe der Transformationsformel (2.22) folgt hieraus $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{-1} \mathrm{Im}\, M_\alpha^a(\lambda + i\epsilon) = c \in (0, \infty)$, also $\mathrm{Im}\, M_\alpha^a(\lambda + i\epsilon) = O(\epsilon) \quad (\epsilon \to 0^+)$.
Die M-Matrix $M_\alpha(z)$ besitzt die Darstellung nach Lemma 2.9; andererseits besitzt die abstrakte M-Funktion $M_\alpha^a(z)$ die Darstellung nach Definition 2.11 mit $f_\alpha \in N(T' - i) \subset N(\widetilde{T} - i)$, also (die Spalten von $\chi_{M_\alpha}(.,i)$ bilden eine Basis von $N(\widetilde{T} - i)$) existiert genau ein $\vec{w} \in \mathbf{C}^n$ mit $f_\alpha = \chi_{M_\alpha}(.,i)\vec{w}$. Einsetzen in die Definition 2.11 liefert

$$\vec{w}^*\, \mathrm{Im}\, M_\alpha(z)\, \vec{w} = \mathrm{Im}\, M_\alpha^a(z) = O(\epsilon) \quad (\epsilon \to 0^+).$$

Da j nach Voraussetzung beliebig war, haben wir also gezeigt: es existiert für jedes u_j ($j = 1, \ldots, s$) genau ein $\vec{w}_j \in \mathbf{C}^n$ mit den geforderten Eigenschaften.

Bleibt zu zeigen, daß die $\vec{w}_j$ linear unabhängig sind: ersetze in [52, S. 375] T bzw. T_0 durch $\widetilde{T}$ bzw. $\widetilde{T}^*$ und beachte, daß die Spalten von $\chi_{M_\alpha}(.,i)$ eine Basis von $N(\widetilde{T} - i)$ bilden. □

Lemma 2.13 *Gibt es zu jedem $\lambda \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ eine reelle Borelmenge, s linear unabhängige Vektoren $\vec{w}_j = \vec{w}_j(\lambda) \in \mathbf{C}^n$ mit*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \vec{w}_j^*(\lambda)\, Im\, M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon)\, \vec{w}_j(\lambda) = 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, s\},$$

so ist die spektrale Vielfachheit des Multiplikationsoperators T_{id} im Raum $L_2(\mathcal{B}, d\rho_\alpha)$ höchstens $n - s$.

Beweis: [52, Lemma 5.2] □

Zusammen mit der Spektraldarstellung (vgl. die Bemerkungen am Ende des letzten Abschnitts) folgt aus Lemma 2.12 und Lemma 2.13:

Satz 2.14 *Sei dim* $N(\widetilde{T} - \lambda) \geq s \ \forall \lambda \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ *eine reelle Borelmenge. Dann ist die Vielfachheit des stetigen Spektrums in* $\mathcal{B}$ *einer beliebigen s.a. Realisierung höchstens* $n - s$.

Zum Zwecke der Referenz erinnern wir abschließend an das Resultat [52, Sätze 6.1, 6.3] über das singulär stetige Spektrum im Defektfall $\gamma = n$:

Satz 2.15 *Sei dim* $N(T_A - \lambda) = s \ \forall \lambda \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ *eine reelle Borelmenge, während für eine Randbedingung* α *kein* $\lambda \in \mathcal{B}$ *ein Eigenwert von* H_α *ist.* $\vec{w}_j \in C^n$ *seien die entsprechenden* s *linear unabhängigen Vektoren aus Lemma* 2.12 ($\gamma = n: \ \widetilde{T} = T_A$). *Weiter gelte* $\limsup_{\epsilon \to 0^+} ||M_\alpha(\lambda + i\epsilon)|| < \infty$ *und*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \inf \vec{v}^* Im\, M_\alpha(\lambda + i\epsilon)\vec{v} > 0 \tag{2.23}$$

für $\vec{v} \notin L(\{\vec{w}_j(\lambda)\})$, $1 \leq j \leq s$. *Dann gilt:*
$\rho_{sc}^{a,\beta}(\mathcal{B}) = 0$ *für beliebigen linken Randpunkt* a *und beliebige Randbedingung* β, *d.h. der Träger von* ρ_{sc} *liegt außerhalb von* $\mathcal{B}$.

Beweis: [52, Sätze 6.1, 6.3] □

Kapitel 3

Asymptotische Integration

Aus der Theorie der Schrödingeroperatoren $\tau_S\, y = -y'' + V(x)\, y$ ist bekannt, daß es einen engen Zusammenhang gibt zwischen dem asymptotischen Verhalten der zwei (!) linear unabhängigen Lösungen von $\tau_S\, y = z\, y$ und den spektralen Eigenschaften der s.a. Operatoren.

Beispielsweise besitzen die selbstadjungierten Realisierungen (in $L_2[a,\infty)$) des Schrödinger Operators mit $V \in L_1[a,\infty)$ in $(0,\infty)$ rein absolut stetiges Spektrum. Weidmann [66, Satz 15.3] konnte dieses Ergebnis mit Methoden aus der Oszillationstheorie auf Potentiale der Form $V = V_1 + V_2$ mit V_1, $V_2' \in L_1[a,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} V_2(x) = 0$, ausdehnen. Einen schnelleren und leichteren (Beweis) Zugang bietet die Theorie der asymptotischen Integration – eine Methode, die Lösungen von linearen Differentialgleichungen unter geeigneten Voraussetzungen asymptotisch zu bestimmen – veknüpft mit der Subordinacy-Methode von Gilbert und Pearson [26]: Tatsächlich konnte Behncke [6, 7] mit diesen Methoden [66, Satz 15.3] auf größere Klassen von Potentialen verallgemeinern. Diese Resultate sind scharf in dem Sinne, daß (siehe [59]) beispielsweise im Fall $V(x) = O(x^{-1})$ positive Eigenwerte möglich sind, während im Fall $V(x) = O(x^{-1/2})$ sogar rein singuläres Spektrum auftreten kann.

Für Operatoren höherer Ordnung steht ein (der Subordinacy-Methode) vergleichbar kraftvolles Instrument nicht zur Verfügung, und tatsächlich wird die Spektralanalyse eben dadurch erheblich erschwert, daß die Gleichung $\tau\, y = z\, y$ vier linear unabhängige Lösungen besitzt. Jedoch läßt sich auch in dieser Situation die asymptotische Integration gewinnbringend einsetzen, wie die Arbeiten über Defektindices (siehe beispielsweise [20, 22, 23, 28]), sowie über die weitergehende Spektralanalyse [10, 53] belegen.

3.1 Transformation auf Levinson-Form

Nach diesen motivierenden Worten betreten wir nun das gleichermaßen fruchtbare wie auch qualvolle Reich der asymptotischen Integration (ein Schelm, der Böses denkt): In diesem Kapitel bestimmen wir mit derselben – approximativ und in Abhängigkeit vom asymptotischen Verhalten der Koeffizientenfunktionen – auf einem Intervall $[a,\infty)$ die Lösungen von (1.2), $(r\,y'')'' - (p\,y')' + q\,y = z\,w\,y$.
Im minimalen Defektfall ($\gamma = 2$) läßt sich die M-Matrix näherungsweise aus diesen Lösungen berechnen. Da einige der spektralen Eigenschaften vom Randwertverhalten der M–Matrix ($\lim_{\epsilon\to 0^+} M(\lambda + i\,\epsilon)$) abhängen, wählen wir den komplexen Parameter z hinfort so, daß gilt:

$$z = \lambda + i\epsilon \quad \text{mit} \quad (\lambda,\epsilon) \in L_0 := A \times [0,\delta)\,,\ A \subseteq I\!R \ \text{ und } \ 0 < \delta \ \text{ klein}\,. \tag{3.1}$$

Aufgrund der Grenzwertbetrachtungen gilt es also, (1.2) gleichmäßig in z zu lösen, d.h. auf $[a,\infty) \times L_0$. Wie bereits das Schrödinger Beispiel gezeigt hat, setzt diese Technik voraus, daß sich die Koeffizientenfunktionen für hinreichend große x nicht zu irregulär verhalten (in der Situation von (1.2) sind die Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen formal von der Form $f'\,f^{-1} \to 0$, $f'\,f^{-1} \in L_2$, $f''\,f^{-1} \in L_1$; siehe aber die einzelnen Fälle).
Sodann läßt sich die Theorie der asymptotischen Integration auf (1.2) anwenden (Darstellungen, die sich allerdings nur auf festes z beziehen, finden sich z.B. in [22, 29, 30]): Schreibe (1.2) als System 1. Ordnung und überführe dieses anhand diverser Transformationen in ein System der Form

$$u' = [\Lambda(x,z) + R(x,z)]\,u\,. \tag{3.2}$$

Für festes z läßt sich darauf der Satz von Levinson [22, Satz 1.3.1] (für die ursprüngliche Fassung siehe [41]) anwenden: Erfüllt die Diagonalmatrix $\Lambda = dg\,(\lambda_k)$

die sogenannte Dichotomiebedingung und gilt $R(.) \in L_1$, so sind die Lösungen dieses Systems asymptotisch gegeben durch $u_k(x) = \{e_k + r_k(x)\}\, exp\,(\int_a^x \lambda_k(t)\,dt)$, e_k: k–ter Einheitsvektor und $r_k(x)$: ein Vektor mit $r_k(x) = o(1)$. Die k–ten Komponenten der Lösungsvektoren u_k sind also Approximationen der Lösungen des ungestörten Systems $u' = \Lambda(x)\,u$.
Der Beweis des Satzes von Levinson zeigt, daß eine in z gleichmäßige Version des Satzes gilt, wenn $\Lambda(x,z)$ und $R(x,z)$ die Voraussetzungen gleichmäßig in z erfüllen. Für unsere Zwecke jedoch ist folgende Modifikation hinreichend (weitergehende Resultate finden sich in [9, Lemma 3.2.b, Satz 3.4]; $||.||$ bezeichnet eine beliebige Matrixnorm):

Satz 3.1 (Levinson) *Die Diagonalmatrix $\Lambda(x,z) = dg\,(\lambda_1(x,z),\ldots,\lambda_n(x,z))$ und die $n \times n$ Matrix $R(x,z)$ seien für festes x stetig in $z \in L \subset \mathbf{C}$, und es gelte:*

1. *Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset L$ existiere ein $f = f_K \in L_{1,lok}([a,\infty))$ mit $||\Lambda(x,z)|| \le f(x)\ \forall z \in K,\ x \ge a$,*

2. Re $\{\lambda_i(x,z) - \lambda_j(x,z)\}$ *habe auf $[a,\infty) \times L$ für jedes Paar ganzer Zahlen i und j in $\{1,\ldots,n\}$ $(i \ne j)$ jeweils konstantes Vorzeichen (Dichotomiebedingung),*

3. *$||R(x,z)|| \le g(x)$ mit $g \in L_1([a,\infty))$.*

Dann hat das System

$$Y'(x,z) = [\Lambda(x,z) + R(x,z)]\,Y(x,z)$$

Lösungen $Y_k(x,z)$ $(1 \le k \le n)$ der asymptotischen Form

$$Y_k(x,z) = \{e_k + r_k(x,z)\}\ \exp\left(\int_a^x \mu_k(t,z)\,dt\right)$$

mit $r_k(x,z)$ stetig in (x,z) (jeweils für festes x bzw. festes z), und für hinreichend großes $c \ge a$ gilt auf $[c,\infty) \times L$: $|r_k(x,z)| \le d\,\int_c^\infty g(t)\,dt$ für eine Konstante d.
Zusatz: *Ist L offen, und sind $\Lambda(x,z)$ und $R(x,z)$ für festes x analytisch in z, so sind die Lösungen für festes x analytisch in z.*

Beweisskizze: (vgl. auch [9, Lemma 3.2.a])

Für festes z ist der Beweis des Satzes von Levinson ausführlich in [22] dargestellt. Somit sind – bezugnehmend auf und in der Notation von [22] – folgende Hinweise hinreichend: Die Bedingungen sind so gewählt, daß die entsprechend modifizierten Abschätzungen in [22, Abschnitt 1.4] (setze Re $\mu_i(x,z) \leq 0$ für $1 \leq i \leq N-1$, Re $\mu_i(x,z) \geq 0$ für $N \leq i \leq n$, ersetze also (1.4.6) durch $|\nu_i(x,z)| \leq 1$, etc.) gleichmäßig auf $[a,\infty) \times L$ gelten. Zum Nachweis der Stetigkeit benutze (1), den Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz), Induktion, sowie die Tatsache, daß der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist. Der Zusatz wird analog bewiesen. □

Bemerkung: Erfüllen nicht alle Paare (i,j), $1 \leq i,j \leq n$, die Dichotomiebedingung, wohl aber die Paare (i,j) mit fest gewähltem Index $j = k$ und $1 \leq i \leq n$, so erhalten wir eine Lösung $Y_k(x,z)$ mit den im Satz angegebenen Eigenschaften (der Beweis in [22] wird für festen Index geführt).

Die Strategie wird nun also sein, die Systemform von (1.2), zur Erinnerung

$$u' = C(x,z)\,u \tag{3.3}$$

mit C, $u = \vec{u}$ aus (2.10), mit Hilfe geeigneter Transformationen auf die Levinson-Form (3.2) zu bringen. Zunächst bemerken wir, daß nach dem Satz von Levinson Transformationen modulo L_1 duchgeführt werden können. Diese Tatsache machen wir uns (wie beispielsweise in [6, 7]) zunutze, indem wir $C(x,z)$ zerlegen in die Summe von glatten (s), bedingt integrierbaren (c) bzw. (sogenannten) integrierbaren (i) Ausdrücken, d.h. wir setzen

$$p = p_s + p_c + p_i\,, \quad q = q_s + q_c + q_i\,, \quad r = r_s\,, \quad w = w_s$$

und erhalten entsprechend

$$C(x,z) = C_s(x,z) + C_c(x) + C_i(x)$$

mit $C_c = q_c\, E_{31} + p_c\, E_{42}$, $C_i = q_i\, E_{31} + p_i\, E_{42}$ und

$$C_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_s^{-1} \\ q_s^w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_s & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_s^w = q_s - z w_s\,, \tag{3.4}$$

wobei E_{kl} die 4×4–Matrix mit Matrixelement 1 an der (kl)–ten Stelle und 0 sonst bezeichnet. Lediglich zur Konvention erhalten Ausdrücke, die nach der letzten Transformation in L_1 liegen, die Bezeichnung *Levinson–Term.*

Der erste Schritt, die bedingt integrierbaren Terme in Levinson–Terme zu transformieren, besteht in der Substitution

$$u = (1 + I)\, u_1 \quad \text{mit} \quad I(x) = \int_\infty^x C_c(t)\, dt\,. \tag{3.5}$$

Es ist $(1 + I)^{-1} = 1 - I$, also folgt mit (3.3)

$$u_1' = [C_s + C_i + C_r]\, u_1 \quad \text{mit} \quad C_r = -I\, C_s + C_s I - I\, C_s I\,. \tag{3.6}$$

Wir folgen nun dem Standardverfahren (vgl. etwa [22]), transformieren das System (3.6) also auf Levinson-Form, indem wir den glatten Anteil $C_s(x, z)$ diagonalisieren. Die nachfolgend auftretende Quadratwurzel wählen wir zunächst beliebig, aber fest. Die Eigenwerte μ_k der Matrix $C_s(x, z)$ sind die Nullstellen von

$$P(x, \mu, z) = \det[C_s(x, z) - \mu\, 1] = r_s(x)\, \mu^4 - p_s(x)\, \mu^2 + q_s(x) - z\, w_s(x)$$

und sind gegeben durch

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{p_s + \Delta}{2\, r}}, \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{p_s - \Delta}{2\, r}}, \quad \mu_2 = -\mu_1\,, \quad \mu_4 = -\mu_3\,, \quad \Delta = \sqrt{p_s^2 - 4\, r_s\, q_s^w}\,. \tag{3.7}$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Eigenwerte auf $[a, \infty) \times L_0$ für ein $a \geq 0$ paarweise verschieden sind. Die normierten Eigenvektoren $v_k\, (1 \leq k \leq 4)$ berechnen sich dann zu $v_k = (1\,,\, \mu_k\,,\, \frac{q_s^w}{\mu_k}\,,\, r_s\, \mu_k^2)^t$, und wir erhalten die diagonalisierende Matrix

T_0 mit

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \mu_3 & -\mu_3 \\ \frac{q_s^w}{\mu_1} & -\frac{q_s^w}{\mu_1} & \frac{q_s^w}{\mu_3} & -\frac{q_s^w}{\mu_3} \\ r_s\mu_1^2 & r_s\mu_1^2 & r_s\mu_3^2 & r_s\mu_3^2 \end{pmatrix}, \qquad T_0^{-1} = \frac{1}{2\,\Delta} \begin{pmatrix} -r_s\mu_3^2 & r_s\mu_1 & \frac{-r_s\mu_1\mu_3^2}{q_s^w} & 1 \\ -r_s\mu_3^2 & -r_s\mu_1 & \frac{r_s\mu_1\mu_3^2}{q_s^w} & 1 \\ r_s\mu_1^2 & -r_s\mu_3 & \frac{r_s\mu_1^2\mu_3}{q_s^w} & -1 \\ r_s\mu_1^2 & r_s\mu_3 & \frac{-r_s\mu_1^2\mu_3}{q_s^w} & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Es gilt also

$$T_0^{-1}\, C_s\, T_0 = dg\,(\mu_1\,,\, -\mu_1\,,\, \mu_3\,,\, -\mu_3).$$

Die Substitution

$$u_1 = T_1\, u_2 \tag{3.9}$$

mit

$$T_1 := T_0\; dg\left(\mu_1^{-1/2}\,\Delta^{-1/2}\,,\, \mu_1^{-1/2}\,\Delta^{-1/2}\,,\, \mu_3^{-1/2}\,\Delta^{-1/2}\,,\, \mu_3^{-1/2}\,\Delta^{-1/2}\right) \tag{3.10}$$

und

$$T_1^{-1} = dg\left(\mu_1^{1/2}\,\Delta^{1/2}\,,\, \mu_1^{1/2}\,\Delta^{1/2}\,,\, \mu_3^{1/2}\,\Delta^{1/2}\,,\, \mu_3^{1/2}\,\Delta^{1/2}\right)\, T_0^{-1}$$

transformiert das System (3.6) zu

$$u_2' = [\Lambda + R]\, u_2 \tag{3.11}$$

mit

$$\Lambda = dg(\mu_1\,,\, -\mu_1\,,\, \mu_3\,,\, -\mu_3)\,, \quad R = -T_1^{-1}\, T_1' + T_1^{-1}\,[C_i + C_r]\, T_1\,. \tag{3.12}$$

Schreiben wir zur Abkürzung $T_0 = (v_{ij})$ und $T_0^{-1} = (2\,\Delta)^{-1}\,(w_{ij})$, so gilt:

$$\left(T_1^{-1}\, E_{kl}\, T_1\right)_{ij} = (2\,\Delta)^{-1}\, l_i^{1/2}\, l_j^{-1/2}\, w_{ik}\, v_{lj}$$

mit $l_1 = l_2 = \mu_1$ und $l_3 = l_4 = \mu_3$ $(1 \leq i, j, k, l \leq 4)$.
Der zweite Summand in (3.12) erfüllt also die L_1-Bedingungen, falls gilt:

$$p_i\, T_1^{-1}\, E_{42}\, T_1\,, \quad q_i\, T_1^{-1}\, E_{31}\, T_1\,, \quad Q_c\, T_1^{-1}\, E_{41}\, T_1\,, \quad Q_c\, T_1^{-1}\, E_{32}\, T_1 \,\in L_1$$

$$r^{-1}\, P_c\, T_1^{-1}\, E_{22}\, T_1\,, \quad r^{-1}\, P_c\, T_1^{-1}\, E_{44}\, T_1\,, \quad r^{-1}\, P_c^2\, T_1^{-1}\, E_{42}\, T_1 \,\in L_1 \tag{3.13}$$

mit

$$P_c(x) = \int_\infty^x p_c(t)\,dt\,, \qquad Q_c(x) = \int_\infty^x q_c(t)\,dt\,.$$

Der Restterm $T_1^{-1}\,T_1'$ berechnet sich zu

$$T_1^{-1}\,T_1' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \\ \alpha_s & 0 & \gamma_s & \beta_s \\ \beta_s & -\gamma_s & 0 & \delta_s \\ -\gamma_s & \beta_s & \delta_s & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

mit

$$\alpha_s := -\frac{\mu_1'}{2\,\mu_1} + \frac{p_s'}{2\,\Delta}\,, \qquad \beta_s := -\frac{(p_s' + \Delta')\,\mu_3^{1/2}}{4\,\Delta\,\mu_1^{1/2}} + \frac{(p_s' - \Delta')\,\mu_1^{1/2}}{4\,\Delta\,\mu_3^{1/2}} \tag{3.15}$$

$$\delta_s := -\frac{\mu_3'}{2\,\mu_3} - \frac{p_s'}{2\,\Delta}\,, \qquad \gamma_s := \frac{(p_s' + \Delta')\,\mu_3^{1/2}}{4\,\Delta\,\mu_1^{1/2}} + \frac{(p_s' - \Delta')\,\mu_1^{1/2}}{4\,\Delta\,\mu_3^{1/2}}\,. \tag{3.16}$$

Die Wahl der diagonalisierenden Matrix T_1 (statt T_0) führt zu $(T_1^{-1}\,T_1')_{ii} \equiv 0$, wodurch die Dichotomiebedingung besser kontrollierbar ist.
Falls nun der Ausdruck $T_1^{-1}\,T_1'$ die L_1-Bedingung aus dem Satz von Levinson nicht erfüllt, kann Satz 3.1 nicht auf das System (3.11) angewandt werden. Allerdings zeigt [23], daß eine weitere Transformation möglicherweise hilfreich sein kann: Um den Satz von Levinson nach einmaliger Transformation anwenden zu können, müssen Bedingungen der Form $f'/f \in L_1$ erfüllt sein, wodurch große Klassen von Funktionen ausgeschlossen sind (z.B. $f = c\,x^\alpha$: $T_1^{-1}\,T_1'$ enthält Matrixelemente der Größenordnung $O(x^{-1})$). Mit Hilfe einer weiteren Diagonalisierung lassen sich diese Bedingungen abschwächen zu $(f'/f)^2$, $f''/f \in L_1$.
Hierzu zerlegen wir $T_1^{-1}\,T_1'$ formal in einen glatten (dieser wird erneut diagonalisiert) und einen L_1-Anteil (den wir abspalten), schreiben also

$$-T_1^{-1}\,T_1' = R_1 + R_2 \quad \text{mit} \quad R_2 \in L_1\,, \quad R_1 \text{ glatt}\,.$$

Entsprechend zerlegen wir die Koeffizienten in:

$$p_s = p_1 + p_2\,,\ q_s = q_1 + q_2\,,\ r = r_s = r_1 + r_2\,,\ w = w_s = w_1 + w_2\,, \tag{3.17}$$

wobei wir stillschweigend voraussetzen, daß die Koeffizienten hinreichend oft differenzierbar sind (vgl. aber die einzelnen Fälle). Diese Zerlegung wird nur im Zähler vorgenommen, und wir werden gleich anhand des einfachsten Beispiels dieses Abspalten erläutern. Nach diesen Vorbereitungen können wir das System (3.11) also in folgender äquivalenter Form schreiben:

$$u_2' = [\Lambda + R_1 + S]\, u_2 \quad \text{mit} \quad S \in L_1\,. \tag{3.18}$$

Um nun dieses System mit Hilfe einer weiteren Diagonalisierung auf Levinson-Form zu bringen, gehen wir vor wie in [22]: Definiere $Q(x,z)$ durch

$$Q_{i,j} := \frac{(R_1)_{i,j}}{\mu_j - \mu_i} \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \text{und} \quad Q_{i,i} \equiv 0\,. \tag{3.19}$$

Dann führt die Transformation

$$u_2 = [1 + Q(x,z)]\, u_3 \tag{3.20}$$

formal auf

$$u_3' = (1+Q)^{-1}[-Q' + (\Lambda + R_1 + S)(1+Q)]u_3\,.$$

Wegen (3.19) gilt $Q\,\Lambda - \Lambda\,Q = R_1$, und somit ist $(\Lambda + R_1)\,(1+Q) = (1+Q)\,\Lambda + R_1\,Q$. Unter der Voraussetzung, daß $(1+Q)^{-1}$ existiert, ist also (3.3) äquivalent zu

$$u_3' = \{\Lambda + (1+Q)^{-1}[R_1\,Q - Q' + S\,(1+Q)]\,\}u_3 \tag{3.21}$$

mit

$$S = R_2 + T_1^{-1}\,[C_i + C_r]\,T_1\,. \tag{3.22}$$

Wir wollen Satz 3.1 auf (3.21) anwenden. Damit der Satz und die Transformationen anwendbar sind, ist zu zeigen, daß
(A) Λ und der zweite Summand aus (3.21) für festes x stetig sind in z,
(B) $||\Lambda(x,z)|| \leq f(x)$ für λ aus Kompakta mit $f \in L_{1,lok}[a,\infty)$,
(C) die Eigenwerte $\mu_k(x,z)$ auf $[a,\infty) \times L_0$ paarweise verschieden sind,
(D) die Eigenwerte μ_k die Dichotomiebedingung erfüllen, sowie daß gleichmäßig in z gilt:

$$Q(x,z) \to 0 \qquad (x \to \infty), \tag{3.23}$$

$$||R_1(x,z)\,Q(x,z)||,\ ||Q'(x,z)||,\ ||S(x,z)||\ \leq \rho(x) \text{ mit } \rho(.) \in L_1[a,\infty)\,. \tag{3.24}$$

(3.24) entpricht der L_1-Bedingung, und aus (3.23) folgt die Existenz von $(1 + Q(x,z))^{-1}$.

Zu einer kleinen Erleichterung der nachfolgenden Untersuchungen führt ein Ansatz, der (in vergleichbarer Form) bereits in [22] benutzt wurde: Setzt man in (3.7)

$$\mu_k(x,z) = P(x)\,\nu_k(x,z) \quad \text{mit} \quad P = \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4} \tag{3.25}$$

(positive Wurzel), so folgt

$$\sqrt{2}\,\nu_1 = \sqrt{\tilde{p} + \tilde{\Delta}}\,, \quad \sqrt{2}\,\nu_3 = \sqrt{\tilde{p} - \tilde{\Delta}}\,, \quad \nu_2 = -\nu_1\,, \quad \nu_4 = -\nu_3 \tag{3.26}$$

mit

$$\tilde{p} := \frac{p_s}{(r\,w)^{1/2}}\,, \quad \tilde{q} := \frac{q_s}{w}\,, \quad \tilde{\Delta} := \sqrt{\tilde{p}^{\,2} - 4(\tilde{q} - z)}\,. \tag{3.27}$$

Abspalten: (3.17) entsprechend schreiben wir den zweiten Summanden von α_s aus (3.14) als

$$\frac{p_s'}{2\,\Delta} = \frac{p_1'}{2\,\Delta} + \frac{p_2'}{2\,\Delta} \qquad \text{und fordern} \qquad \frac{p_2'}{2\,\Delta} \in L_1\,.$$

Liegt beispielsweise der Fall $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ beschränkt vor, so reduziert sich diese Forderung auf $\frac{p_2'}{(rw)^{1/2}} \in L_1$.

3.2 Lösungen

Wir zeigen im nächsten Abschnitt: aus (C) folgt (D). Die Bedingungen (3.23), (3.24) und (C) hängen offensichtlich vom asymptotischen Verhalten der Koeffizientenfunktionen ab, müssen also jeweils in den zugrundeliegenden Fällen bestimmt werden. Aus diesen Bedingungen wird folgen, daß r_s, p_s, q_s, w_s notwendigerweise stetig sind. Sind nun x, y reelle Zahlen derart, daß $\varphi = \arg(x+iy) \in (0, 2\pi)$ gilt, so legen wir die Quadratwurzel o.B.d.A fest durch $\sqrt{x+i\,y} := (x^2+y^2)^{1/4}\exp(i\,\varphi/2)$. Für $\epsilon > 0$ und festes x sind die Eigenwerte $\mu_k(x,z)$ also stetig in z und für $\epsilon = 0$ setzen wir $\mu_k(x,z)$ stetig fort: $\mu_k(x,\lambda) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\mu_k(x,z)$; insbesondere folgen (A) und (B). Verhalten sich die Koeffizientenfunktionen asymptotisch nun derart, daß die Bedingungen (C), (3.23), (3.24) erfüllt sind, so besitzt (3.21) nach Satz 3.1 für $1 \le k \le 4$ Lösungen der asymptotischen Form

$$Z^{(k)}(x,z) = (e_k + l_k(x,z))\exp\left(\int_a^x \mu_k(t,z)\,dt\right) \tag{3.28}$$

mit $l_k(x,z)$ stetig in x (bzw. in z) und auf $[a,\infty)\times L_0$ gleichmäßig beschränkt in z: Zu gegebenem $\gamma > 0$ kann ein hinreichend großes $a = a(\gamma)$ gewählt werden derart, daß gilt: $|l_k(x,z| \le \gamma$.

Bleibt also noch die Rücktransformation über (3.20), (3.9) und (3.5):

$$u_k(x,z) = [1 + I(x)]\, T_1(x,z)\, [1 + Q(x,z)]\, Z^{(k)}(x,z),$$

wobei $(1+I)$, T_1, $(1+Q)$ regulär sind (x hinreichend groß) und stetig in x bzw. z.

Wir behandeln nun den Fall, daß die Eigenwerte μ_k von gleicher Größenordnung sind (gleichmäßig in z: $|\mu_1(x,z)| \approx |\mu_3(x,z)| \approx f(x)$ für geeignetes f) und fordern zusätzlich zu (3.23) und (3.24), daß (gleichmäßig in z)

$$r_s^{-1}\mu_k^{-1}P_c\,,\; r_s^{-1}\mu_k^{-3}Q_c \;\to 0 \qquad\qquad (x\to\infty) \tag{3.29}$$

gilt ($P_c(x) = \int_\infty^x p_c(t)\,dt,\;\; Q_c(x) = \int_\infty^x q_c(t)\,dt$).
Dann besitzt (3.3) (oder äquivalent (2.2), $n = 2$) Lösungen der asymptotischen Form ($x \to \infty$):

$$u_1(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1 + r_{11}(x,z) \\ \mu_1(x,z)[1 + r_{12}(x,z)] \\ (r\mu_1\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{13}(x,z)] \\ (r\mu_1^2)(x,z)[1 + r_{14}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_2(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1 + r_{21}(x,z) \\ -\mu_1(x,z)[1 + r_{22}(x,z)] \\ (-r\mu_1\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{23}(x,z)] \\ (r\mu_1^2)(x,z)[1 + r_{24}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{-\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_3(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1 + r_{31}(x,z) \\ \mu_3(x,z)[1 + r_{32}(x,z)] \\ (r\mu_3\mu_1^2)(x,z)[1 + r_{33}(x,z)] \\ (r\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{34}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{\int_a^x \mu_3(t,z)\,dt\}$$

$$u_4(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{41}(x,z) \\ -\mu_3(x,z)[1 + r_{42}(x,z)] \\ (-r\mu_3\mu_1^2)(x,z)[1 + r_{43}(x,z)] \\ (r\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{44}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{-\int_a^x \mu_3(t,z)\,dt\} \tag{3.30}$$

mit $r_{ki}(x,z)$ stetig in (x,z) (jeweils für festes x bzw. festes z), und $a = a(\gamma)$ kann so groß gewählt werden, daß $r_{ki}(x,z)$ auf $[a,\infty) \times L_0$ in einer kleinen Umgebung $U_\gamma(0)$ liegt.

3.3 Dichotomiebedingung

Ist $z = \lambda + i\epsilon$ mit $(\lambda,\epsilon) \in L_0 = A \times [0,\delta)$, $A \subseteq I\!R$ und $\delta > 0$ (klein), so ist aufgrund der Darstellung $\mu_k(x,z) = P(x)\,\nu_k(x,z)$ mit $1 \leq k \leq 4$, $P(x) > 0$, nach Satz 3.1 zu zeigen, daß $Re\,\nu_1(x,z)$, $Re\,\nu_3(x,z)$ und $Re\,\{\nu_1(x,z) \pm \nu_3(x,z)\}$ auf $[a,\infty) \times L_0$ konstantes Vorzeichen besitzen.

Lemma 3.2 *Seien x, y beliebige reelle Zahlen und $\epsilon > 0$. Dann gilt:*
(i) $Re\sqrt{x + \sqrt{y + i\,\epsilon}} > 0$, $\quad Re\sqrt{x - \sqrt{y + i\,\epsilon}} < 0$, $\quad Im\sqrt{x \pm \sqrt{y + i\,\epsilon}} > 0$,
(ii) $Re\{-\sqrt{x + \sqrt{y + i\,\epsilon}} + \sqrt{x - \sqrt{y + i\,\epsilon}}\} < 0$,
(iii) $Re\{\sqrt{x + \sqrt{y + i\,\epsilon}} + \sqrt{x - \sqrt{y + i\,\epsilon}}\} > 0$.

Beweis:
Sind x, y reelle Zahlen mit $y \neq 0$, $\arg(x+iy) \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, so gilt offensichlich für $y > 0$: $Im\,\sqrt{x \pm i\,y} > 0$, $Re\,\sqrt{x + i\,y} > 0$ und $Re\,\sqrt{x - i\,y} < 0$,
also folgt (i), womit auch (ii) bewiesen ist. Bleibt (iii): Definiere $f_\pm := \sqrt{x \pm \sqrt{y + i\,\epsilon}}$ und setze $f_+ = \alpha + i\,\beta$ und $f_- = \gamma + i\,\delta$ mit $\alpha, \beta, \delta > 0$ und $\gamma < 0$ ((i)). Angenommen es existieren $(x,y,\epsilon) \in R^2 \times R_+$ mit $Re\{\sqrt{x + \sqrt{y + i\,\epsilon}} + \sqrt{x - \sqrt{y + i\,\epsilon}}\} \leq 0$, also $0 < \alpha \leq -\gamma$, so folgt mit $0 < \alpha\beta = -\gamma\delta$ (benutze: $Im\,f_+^2 = -Im\,f_-^2$) die Gleichung: $x + Re\,\sqrt{y + i\,\epsilon} = Re\,f_+^2 = \alpha^2 - \beta^2 \leq \gamma^2 - \delta^2 = Re\,f_-^2 = x - Re\,\sqrt{y + i\,\epsilon}$ im Widerspruch zu $Re\,\sqrt{y + i\,\epsilon} > 0$ $(\epsilon > 0)$. Es folgt die Behauptung. $\square$

Die Koeffizientenfunktionen p_s, q_s, r_s, w_s sind reellwertig; ist nun $(\lambda, \epsilon) \in A \times (0, \delta)$, so folgt mit $f(x, \lambda) := \tilde{p}^{\,2}(x) - 4\,\tilde{q}(x) + 4\lambda$ und der Darstellung

$$\sqrt{2}\,\nu_{1,3}(x, z) = \sqrt{\tilde{p}(x) \pm \sqrt{f(x, \lambda) + i\,\epsilon_0}}, \quad (\tilde{p}(x), f(x, \lambda), \epsilon_0) \in I\!R^2 \times I\!R_+$$

nach Lemma 3.2 auf $[a, \infty) \times A \times (0, \delta)$:

$$Re\ \nu_1(x, z) > 0\,, \qquad Re\ \nu_3(x, z) < 0, \tag{3.31}$$

$$Re\ \{\nu_1(x, z) + \nu_3(x, z)\} > 0, \quad Re\ \{-\nu_1(x, z) + \nu_3(x, z)\} < 0\,. \tag{3.32}$$

Die Eigenwerte $\mu_k(x, z)$ erfüllen also die Dichotomiebedingung auf $[a, \infty) \times A \times (0, \delta)$. Bleibt zu zeigen, daß in $\epsilon = 0$ kein Vorzeichenwechsel stattfindet: Nach Voraussetzung (μ_k paarweise verschieden) sind die Fälle $f(x, \lambda) = 0$ und $\tilde{p}(x) \pm \sqrt{f(x, \lambda)} = 0$ auszuschließen.
Im Fall $f(x, \lambda) < 0$ gilt $\mathrm{Re}\ \nu_1(x, \lambda) = -\mathrm{Re}\ \nu_3(x, \lambda) > 0$;
im Fall $f(x, \lambda) > 0$ gilt im Fall
(1) $0 > \tilde{p}(x) + \sqrt{f(x, \lambda)} > \tilde{p}(x) - \sqrt{f(x, \lambda)}$: $\quad Re\ \nu_1(x, \lambda) = Re\ \nu_3(x, \lambda) = 0\,,$
(2) $\tilde{p}(x) + \sqrt{f(x, \lambda)} > 0 > \tilde{p}(x) - \sqrt{f(x, \lambda)}$: $\quad Re\ \nu_1(x, \lambda) > 0\,,\ Re\ \nu_3(x, \lambda) = 0,$
(3) $\tilde{p}(x) + \sqrt{f(x, \lambda)} > \tilde{p}(x) - \sqrt{f(x, \lambda)} > 0$: $\quad Re\ \nu_1(x, \lambda) > -Re\ \nu_3(x, \lambda) > 0.$
In allen Fällen ist die Dichotomiebedingung also selbst dann noch erfüllt, wenn die Koeffizientenfunktionen zwischen den Fällen (0) – (3) springen. Somit gilt:

Lemma 3.3 *Die Koeffizientenfunktionen p_s, q_s, r, w seien reellwertig und $z = \lambda + i\epsilon \in L_0$. Sind die Eigenwerte $\mu_k(x, z)$ $(1 \le k \le 4)$ auf $[a, \infty) \times L_0$ paarweise verschieden, so erfüllen die Eigenwerte auf $[a, \infty) \times L_0$ auch die Dichotomiebedingung, und es gilt*

$$Re\ \nu_1(x, z) \ge 0\,,\ Re\ \nu_3(x, z) \le 0. \tag{3.33}$$

Bemerkung: Analoge Aussagen gelten auch für $(\lambda, \epsilon) \in A \times (-\delta, 0]$.

3.4 Spektraltheorie der Operatoren

Die spektralen Eigenschaften s.a. Realisierungen von τ hängen – via Zerlegungsmethode, M-Matrix sowie $dim\ N(T - \lambda)$ – entscheidend vom asymptotischen Verhalten der Lösungen von (1.2) ab. Die Asymptotische Integration wiederum setzt einerseits voraus, daß die Funktionen $\mu_k(x,z) = P(x)\,\nu_k(x,z)$ auf $[a,\infty) \times L_0$ paarweise verschieden sind (Transformation auf Levinson-Form) und andererseits, daß die Koeffizientenfunktionen die Regularitätsbedingungen (3.23), (3.24) erfüllen (Satz von Levinson). Ersteres hängt nach (3.25) vom asymptotischen Verhalten von $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ ab ($\widetilde{p}^{\,2} - 4\widetilde{q} + 4\lambda \neq 0$ und $\widetilde{q} - \lambda \neq 0$: $\epsilon = 0$) und kann (je nach Fall) dazu führen, daß über bestimmte Intervalle der reellen Achse keine spektralen Aussagen getroffen werden können. Diese Intervalle sind möglicherweise Kandidaten für singulär stetiges Spektrum.

Ein weiteres Indiz dafür, daß die spektralen Eigenschaften – zumindest im Rahmen der asymptotischen Integration – wesentlich durch das Größenverhältnis von $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ und $\widetilde{p}^{\,2} - 4\widetilde{q}$ bestimmt werden, liefert (3.34) in Verbindung mit (3.25) - (3.27) (vgl. auch die Kummer-Liouville-Transformation, Kapitel 9).

Dementsprechend sind die Untersuchungen dieser Arbeit stark durch den Ansatz (3.25) geprägt, d.h. wir konzentrieren uns auf Fälle der (formalen) Form

- $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ auf einem Intervall $[a,\infty)$ beschränkt,
- $\widetilde{p}^{\,2}(x) - 4\widetilde{q}(x) \to \pm\infty \quad (x \to \infty)$,
- $\widetilde{p}(x)$, $\widetilde{q}(x) \to \pm\infty \quad (x \to \infty)$,

wobei aufgrund der asymptotischen Integration weitere Differenzierungen vorgenommen werden müssen ($\widetilde{p}^{\,2} - 4\widetilde{q} = o(\widetilde{p}^{\,2})$, $\widetilde{p}^{\,2} = O(\widetilde{q})$, etc.). Wir werden die konkrete Auswahl in den jeweiligen Kapiteln begründen.

3.5 Referenz

Vorbereitend tragen wir in diesem Abschnitt einige häufig benutzte Hilfsmittel zusammen, die wir hinfort stillschweigend oder unter dem Stichwort *Referenz* benutzen.

Zerlegungsmethode: T_0'' bezeichnet die Einschränkung von T_0' auf $D_{T_0''} = \{y \in D_{T_0'} : \vec{y}(a) = 0,\ a \in (0,\infty)\}$ und heißt Zerlegung von T_0' im beliebig, aber fest gewählten Zerlegungspunkt a: T_0'' ist die direkte Summe der durch τ in $L_2((0,a),\, w\,dx)$ bzw. $L_2((a,\infty),\, w\,dx)$ (analog zu T_0') erzeugten Operatoren T_1', T_a'. Durch Übergang zu den Abschließungen T_1, T_a erhalten wir $\overline{T_0''} = T_1 \oplus T_a$, und durch Übergang zu den s.a. Erweiterungen H_0, H_a in $L_2((0,a),\, w\,dx)$ bzw. $L_2((a,\infty),\, w\,dx)$ ist deren direkte Summe eine s.a. Fortsetzung A von $\overline{T_0''}$:

$$A = H_0 \bigoplus H_a\,, \quad \sigma(A) = \sigma(H_0) \cup \sigma(H_a)\,.$$

Die spektralen Eigenschaften von A sind im wesentlichen bestimmt durch H_a: Die Randpunkte 0 und a sind reguläre Randpunkte, also ist H_0 nach unten beschränkt [40, Sätze 4.1, 4.2], und H_0 besitzt rein diskretes Spektrum, d.h. $\sigma_{ess}(H_0) = \emptyset$ [18, S. 1330 f.] (vgl. auch [43, §19]). Da jede s.a. Erweiterung von T_0 ebenfalls eine s.a. Erweiterung von $\overline{T_0''}$ ist, erhalten wir spektrale Aussagen über s.a. Erweiterungen H von T_0 durch nachfolgende Bemerkungen:

1. Nach Voraussetzung besitzt $\overline{T_0''}$ endliche und gleiche Defektzahlen, also besitzen alle selbstadjungierten Erweiterungen dasselbe wesentliche Spektrum [4, §105, Satz 1]: $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(H_a)$.

2. Ist T_a halbbeschränkt, so auch jede s.a. Erweiterung [4, §107].

3. Die absolutstetigen Teile von H_a und H sind unitär äquivalent [50, Satz XI.9].

Quadratintegrierbare Lösungen (Eigenwerte μ_k von gleicher Größenordnung): Auswertung der Integrale $\int_a^\infty u_i^*(x,z)A(x)u_i(x,z)\,dx$ mit $A(x)$ aus (2.11) und u_i aus (3.30) führt auf:

$$\int_a^\infty u_i^*(x,z)\,A(x)\,u_i(x,z)\,dx \approx \int_a^\infty P(x)\,|\widetilde{\Delta}(x,z)|^{-1}\,|\nu_i(x,z)|^{-1}\,e^{2\int_a^x P(t)\,Re\,\nu_i(t,z)\,dt}\,dx \tag{3.34}$$

Die Approximation $\approx$ rührt her von den gleichmäßig auf $[a,\infty)\times L_0$ beschränkten Resten $r_{ki}(.,.)$. Die Anzahl linear unabhängiger quadratintegrierbarer Lösungen von (2.2) (insbesondere die Defektzahlen, Im $z \neq 0$, des durch Zerlegung gewonnenen minimalen Operators) läßt sich also aus (3.34) berechnen.

Maximaler Defektfall: Im maximalen Defektfall ist die Resolvente ein Hilbert-Schmidt Operator, also besitzen die s.a. Realisierungen diskretes Spektrum [18].

M**-Matrix im minimalen Defektfall** (Eigenwerte von gleicher Größenordnung):

- In allen in dieser Arbeit untersuchten Fällen sind $u_2(.,z)$ und $u_3(.,z)$ für $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen. Im minimalen Defektfall ($\gamma = 2$) können wir also wie in [53] die M-Matrix mit Hilfe von (3.30) bestimmen:

- Nach Voraussetzung ist $N(\tau_A - z)$ für $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ zweidimensional; eine Basis bildet $\chi_M(.,z)$ (siehe Seite 14). Andererseits sind $u_2(.,z)$, $u_3(.,z)$ zwei linear unabhängige L_A^2-Lösungen. Setzen wir $W(.,z) := (u_2(.,z), u_3(.,z))$, so gibt es also eine Matrix $K = K(\alpha, z) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\chi_{M_\alpha}(.,z) = W(.,z)K_\alpha(z)$. Wir schreiben $W = (W_1, W_2)^t$ und stellen in $c \in [a, \infty)$ (c hinreichend groß, somit liegen die Reste $r_{ik}(c,z)$ in einer kleinen Umgebung $U(0)$ gleichmäßig in z) die Dirichletrandbedingung ($\alpha_1 = 1_2$, $\alpha_2 = 0_2$, d.h. $Y_\alpha(c,z) = 1_4$) und erhalten $M_\alpha(z) = W_2(c,z)W_1^{-1}(c,z)$.

Wir benutzen nun die Lösungen (3.30) und berechnen die M-Matrix zu

$$M_\alpha(z) = (rw)^{1/2}(c)\,[\nu_1(1+r_1) + \nu_3(1+r_2)]^{-1}(c,z) \quad \times$$

$$\begin{pmatrix} P\nu_1\nu_3\,(\nu_1^2(1+r_3) - \nu_3^2(1+r_4)) & \nu_1\nu_3(\nu_1(1+r_5) + \nu_3(1+r_6)) \\ \nu_1\nu_3(\nu_1(1+r_7) + \nu_3(1+r_8)) & -P^{-1}(\nu_1^2(1+r_9) - \nu_3^2(1+r_{10})) \end{pmatrix}(c,z)\,. \tag{3.35}$$

Die Reste $r_i(c,z)$, $1 \leq i \leq 10$, sind stetig in $z \in L_0$ und liegen in einer kleinen Umgebung $U(0)$ (gleichmäßig in z).
Falls nun (beispielsweise) $|\nu_i^2(x,z)|/|\widetilde{\Delta}(x,z)|$ ($i = 1,3$) auf $[c,\infty) \times L_0^+$ ($\epsilon > 0$) gleichmäßig beschränkt ist, folgt mit (3.35):

$$M_\alpha(z) = (rw)^{1/2}(c)\begin{pmatrix} P\,\nu_1\,\nu_3\,(\nu_1 - \nu_3)\,(1+s_1) & \nu_1\,\nu_3\,(1+s_2) \\ \nu_1\,\nu_3\,(1+s_3) & -P^{-1}\,(\nu_1 - \nu_3)\,(1+s_4) \end{pmatrix}(c,z), \tag{3.36}$$

wobei die Reste $s_i(c,z)$ (c hinreichend groß) dieselben Eigenschaften besitzen wie die Funktionen $r_i(c,z)$ aus (3.35). Aus der Stetigkeit von $M(z)$ folgt ($\lambda \in K$, K kompakt) $\limsup_{\epsilon\to 0+} ||M_\alpha(\lambda + i\epsilon)|| < \infty$.

Quadratische Form: Mit partieller Integration folgt für Funktionen $y \in D_{T_0'}$:

$$\langle \tau\, y, y \rangle_{[a,\infty)} = \int_a^\infty \left(r\,|y''|^2 + p\,|y'|^2 + q\,|y|^2 \right)\, dx \tag{3.37}$$

Zu Vergleichszwecken geben wir die hieraus unmittelbar folgende Verallgemeinerung ($w > 0$) von [43, 24.3, Sätze 2 und 3] an:

Satz 3.4 *qw^{-1} sei nach unten beschränkt mit $\liminf_{x\to\infty} \frac{q}{w}(x) = q_0$ und für hinreichend große x besitze p positives Vorzeichen. Dann sind die selbstadjungierten Realisierungen H halbbeschränkt und besitzen in $(-\infty, q_0)$ diskretes Spektrum mit dem einzig möglichen Häufungswert in q_0 :*

$$\sigma_{ess}(H) \subset [q_0, \infty)\,.$$

Im Fall $\frac{q}{w} \to \infty$ ist das Spektrum von H also diskret.

Beweis: Wir benutzen die Aussagen und Bezeichnungen aus der Darstellung über die Zerlegungsmethode (siehe S. 38):
$q_0 < \infty$: Als Zerlegungspunkt wähle $a = a(\gamma)$, $\gamma > 0$, so, daß für $x > a$ gilt: $\frac{q}{w}(x) > q_0 - \gamma$ und $p(x) \geq 0$. Entsprechend erhalten wir die Zerlegung $\overline{T_0''} = T_1 \bigoplus T_a$. Nach (3.37) gilt für $y \in D_{T_a'}$: $\langle T_a'\, y, y \rangle > (q_0 - \gamma)||y||^2$. Es folgt $\sigma_{ess}(T_a) \cap (-\infty, q_0 - \gamma) = \emptyset$ und T_a halbbeschränkt, also mit $\gamma \to 0$ die Behauptung, da T_1 halbbeschränkt ist und rein diskretes Spektrum besitzt.
$q\, w^{-1} \to \infty$: Wähle eine beliebige Zahl $N > 0$. Dann existiert ein hinreichend großes $a = a(N)$ derart, daß $q(x)w^{-1}(x) > N$ und $p(x) \geq 0$ gilt für $x \in [a, \infty)$. Es folgt $\langle T_a'\, y, y \rangle > N||y||^2$, also die Behauptung ($N$ beliebig). □

In den nachfolgenden Untersuchungen bezeichnet H_a die durch Zerlegung erhaltene s.a. Realisierung (in $L_2((a,\infty), w\, dx)$) mit Dirichletrandbedingung in $a \geq 0$, und wir benutzen folgende Abkürzungen (positive Wurzel):

$$P = (w/r)^{1/4},\ P_q = (q_s/r)^{1/4}\,(q_s > 0),\ P_q^- = (|q_s|/r)^{1/4}\,(q_s < 0).$$

Eine weitere Abkürzung besteht in der Schreibweise $I := \int_a^\infty |f(t)|\, dt$ mit $I < \infty$ (bzw. $I = \infty$), was (unschwer zu erraten) für $f \in L_1$ (bzw. $f \notin L_1$) steht.

Kapitel 4

Der Fall: $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ beschränkt

$\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ sind definiert durch (3.27), und wir erinnern an $p = p_s + p_i + p_c$, $q = q_s + q_i + q_c$, $r = r_s$, $w = w_s$. Seien also $\widetilde{p}$ und $\widetilde{q}$ für hinreichend große x beschränkt und $z = \lambda + i\epsilon \in L_0 := A \times [0, \delta)$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und δ klein. Damit die Funktionen $\mu_k(x,z) = P(x)\,\nu_k(x,z)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ auch für $\epsilon = 0$ paarweise verschieden sind, unterscheiden wir nachfolgend drei Fälle:

1. **Fall:** $\lambda \in A_1 := (-\infty, \lambda_0]$ mit $\lambda_0 < c_0 := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q} - \widetilde{p}^2/4\}$

2. **Fall:** $\lambda \in A_2 := [\lambda_1, \lambda_2]$ mit $\lambda_1 > c_1 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q} - \widetilde{p}^2/4\}$,
   $\lambda_2 < c_2 := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q}\}$ und $c_1 < c_2$

3. **Fall:** $\lambda \in A_3 \subset [\lambda_3, \infty)$ mit $\lambda_3 > c_3 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q}\}$, A_3 kompakt

Vorbehaltlich der Bedingungen der Asymptotischen Integration (**As. In.**) lassen sich die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels wie folgt zusammenfassen:

- Der durch Zerlegung gewonnene minimale Operator besitzt die Defektzahlen $(2, 2)$ (Lemma 4.2).

- Die selbstadjungierten Realisierungen H sind halbbeschränkt nach unten (Satz 4.3). Tatsächlich gilt diese Aussage bereits unter der schwächeren Annahme, daß $\widetilde{p}$ und $\widetilde{q}$ nach unten beschränkt sind (Korollar 4.6).

- $\sigma_{ess}(H) \subset [c_0^-, \infty)$ mit $c_0^- := \liminf_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x) - (\tilde{p}_-)^2(x)/4\}$ (Korollar 4.5), und H besitzt

- in $(-\infty, c_0^-) \cup (c_1, c_2) \cup (c_3, \infty)$ kein singulär stetiges Spektrum (Sätze 4.7, 4.8),

- in (c_1, c_2) je nach Vorzeichen von p_s (nach Konstruktion besitzt p_s für hinreichend große x konstantes Vorzeichen) entweder ($p_s > 0$) diskretes Spektrum mit den einzig möglichen Häufungswerten in c_1, c_2 oder aber ($p_s < 0$) absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 2 ohne eingebettete Eigenwerte (Satz 4.7),

- in $[c_3, \infty)$ absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 1, und die Eigenwerte besitzen in (c_3, ∞) keinen Häufungspunkt (Satz 4.8).

As. In.: Nach Voraussetzung sind die Eigenwerte μ_k von gleicher Größenordnung und in allen drei Fällen existiert zu gegebenem $\lambda_i = \lambda_i(c_i)$ $(0 \leq i \leq 3)$ ein $a = a(\lambda_i)$ derart, daß die Eigenwerte $\mu_k(x, z)$ auf $[a, \infty) \times L_0$ paarweise verschieden sind (siehe Beweise der Sätze). Nach Lemma 3.3 ist die Dichotomiebedingung also erfüllt, und es bleibt (3.23), (3.24) und (3.29) zu verifizieren: Eine direkte Rechnung zeigt, daß die (in z gleichmäßigen) **Bedingungen der asymptotischen Integration** gegeben sind durch (in nachfolgenden Formeln setze $p = p_s$, $q = q_s$, $r = r_s$, $w = w_s$):

$$P_c(x) := \int_\infty^x p_c(t)\,dt\,, \quad Q_c(x) := \int_\infty^x q_c(t)\,dt\,, \quad P(x) := \left(\frac{w}{r}\right)^{1/4}(x)$$

$$P\,\frac{p_i}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ P\,\frac{q_i}{w}\,,\ \frac{P_c}{r}\,,\ P^{-1}\,\frac{P_c^2}{r^2}\,,\ \frac{Q_c}{(r\,w)^{1/2}}\ \in L_1 \tag{4.1}$$

$$P^{-1}\,\frac{P_c}{r}\,,\ P^{-1}\,\frac{Q_c}{(r\,w)^{1/2}}\ \to 0 \tag{4.2}$$

$$\left[\frac{p_2'}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q_2'}{w}\,,\ \frac{r_2'}{r}\,,\ \frac{w_2'}{w}\right] \in L_1 \tag{4.3}$$

$$P^{-1}\left[\frac{p_1'}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q_1'}{w}\,,\ \frac{r_1'}{r}\,,\ \frac{w_1'}{w}\right] \to 0 \tag{4.4}$$

$$P^{-1/2}\left[\frac{p_1'}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q_1'}{w}\,,\ \frac{r_1'}{r}\,,\ \frac{w_1'}{w}\right] \in L_2 \tag{4.5}$$

$$P^{-1}\left[\frac{p_1''}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q_1''}{w}\,,\ \frac{r_1''}{r}\,,\ \frac{w_1''}{w}\right] \in L_1 \tag{4.6}$$

Hierbei entsprechen (4.1), (4.3) der Bedingung $S(x,z) \leq \rho(x)$ mit $\rho \in L_1$ (bedingt integrierbare, integrierbare Terme und Abspalten von R_2), (4.2) der Rücktransformation, (4.4) der Bedingung $Q(x,z) \to 0$, und (4.5), (4.6) entsprechen der Bedingung $R_1(x,z)\, Q(x,z)\, ,\, Q'(x,z)\ \leq \rho(x)$ mit $\rho \in L_1$. Die Lösungen sind also gegeben durch (3.30) mit den dort angegebenen Eigenschaften.

Defektindex: Seien also $\epsilon \in (0,\delta)$ und $\lambda \in A_i$ jeweils beliebig, aber fest gewählt. Sind $x,\ y \in K \subset I\!R$, K kompakt, so sind Real – und Imaginärteil von $\sqrt{x \pm \sqrt{y + i\,\epsilon}}$ von 0 weg beschränkt: In allen drei Fällen gibt es also Konstante d_i mit

$$d_1 \leq Re\ \nu_3(x,z) \leq d_2 < 0 < d_3 \leq Re\ \nu_1(x,z) \leq d_4\,. \tag{4.7}$$

Nach (3.34) folgt $(1 \leq i \leq 4)$

$$\int_a^\infty u_i^*(x,z)\, A(x)\, u_i(x,z)\, dx \approx \int_a^\infty P(x)\, \exp\left(\pm c \int_a^x P(t)\, dt\right)\, dx = \int_0^I \exp(\pm c\, u)\, du \tag{4.8}$$

mit Konstanten $c > 0$ und

$$I := \int_a^\infty P(t)\ dt\,.$$

Für festes z $(\epsilon > 0)$ sind also $u_2(.,z)$, $u_3(.,z)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen.

Bemerkung 4.1 *Aus den Bedingungen der Asymptotischen Integration folgt, daß P nicht integrierbar ist, d.h. $P(.) \notin L_1[a,\infty)$: Die Annahme $P(.) \in L_1[a,\infty)$ führt zusammen mit den Bedingungen (4.3), (4.4) auf $r'/r,\ w'/w\ \in\ L_1[a,\infty)$. Hieraus wiederum folgt, daß r und w für $x \to \infty$ endliche, strikt positive Limiten besitzen: $P(.) \notin L_1[a,\infty)$.*

Somit folgt unmittelbar:

Lemma 4.2 *Die Koeffizientenfunktionen $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ seien beschränkt und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt. Dann ist der Defektindex minimal ($=$ $(2,2)$) und die M-Matrix gegeben durch (3.36).*

Wir beginnen mit **Fall** 1:

Satz 4.3 *$\tilde{p}$, $\tilde{q}$ seien beschränkt, $c_0 := \liminf_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x) - \tilde{p}^2(x)/4\}$ und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt. Dann sind die selbstadjungierten Realisierungen H halbbeschränkt (nach unten) und besitzen in $(-\infty, c_0)$ diskretes Spektrum mit dem einzig möglichen Häufungswert in c_0 :*

$$\sigma_{ess}(H) \subset [c_0, \infty)\,.$$

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert zu gegebenem $\lambda_0 < c_0$ ein $a = a(\lambda_0)$ und eine Konstante $d = d(\lambda_0)$ derart, daß auf $[a, \infty) \times (-\infty, \lambda_0]$ gilt:
$0 < d \leq 4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2 - 4\,\lambda \leq 4\,\tilde{q} - 4\,\lambda$: Die Funktionen $\mu_k(x, z)$ sind auf $[a, \infty) \times L_0$ paarweise verschieden und für $\epsilon = 0$ gilt: Re $\nu_1(x, \lambda) = -$Re $\nu_3(x, \lambda) \geq d_1 > 0$ und Im $\nu_1(x, \lambda) =$Im $\nu_3(x, \lambda) \geq d_2 > 0$ für Konstanten d_i. Nach (3.34) sind also $u_2(., \lambda)$ und $u_3(., \lambda)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen von $\tau_A\, y = \lambda\, y$ auf $[a, \infty) \times (-\infty, \lambda_0]$ $\quad$ (u_1, $u_4 \notin L_A^2$: Nach Bemerkung 4.1 gilt $P(.) \notin L_1[a, \infty)$).
Wir wenden nun die Zerlegungsmethode an (vgl. S. 38): $A = H_0 \bigoplus H_a$ ist eine s.a. Fortsetzung von $\overline{T_0''}$, wobei H_a die s.a. Realisierung in $\mathcal{H}_{[a,\infty)}$ bezeichnet mit Dirichletrandbedingung in a. H_0 besitzt diskretes Spektrum und ist halbbeschränkt nach unten. Nach *Referenz* (siehe S. 38) ist es hinreichend, die Behauptung des Satzes für H_a zu zeigen.
Bezeichnet T_A den maximalen Operator in $\mathcal{H}_{[a,\infty)}$, so gilt also dim $N(T_A - \lambda) = 2$ $\forall \lambda \in (-\infty, \lambda_0]$. Da der Defektindex nach Voraussetzung minimal ist, folgt mit Satz 2.8: Alle s.a. Realisierungen H (in $\mathcal{H}_{[a,\infty)}$) besitzen in $(-\infty, c_0)$ kein stetiges Spektrum ($\sigma_c(H) \cap (-\infty, c_0) = \emptyset$), d.h. sie haben in $(-\infty, c_0)$ höchstens Eigenwerte, sowie Häufungspunkte derselben (tatsächlich gilt nach Satz 2.8 $\sigma_{ac}(H) \cap (-\infty, c_0) = \sigma_{sc}(H) \cap (-\infty, c_0) = \emptyset$ für beliebige s.a Realisierung H in $L_2([0, \infty), w\, dx)$: löse $u_{2,3}(x, \lambda)$ von $[a, \infty)$ zurück auf $[0, \infty)$).
Angenommen $\lambda \in (-\infty, c_0)$ ist ein zu H_a gehörender Häufungspunkt: λ liegt im wesentlichen Spektrum von H_a und somit gilt $\lambda \in \sigma_{ess}(H_\alpha)$ für beliebige s.a. Realisierung H_α: für jedes α existiert eine Folge von Eigenwerten $\{\lambda_n\} = \{\lambda_n\}(\alpha)$ mit $\lambda_n \to \lambda$ und eine Folge von Eigenfunktionen $y(., \lambda_n) \in D(H_\alpha)$ mit $y(., \lambda_n) = c_1(\lambda_n)u_2(., \lambda_n) + c_2(\lambda_n)u_3(., \lambda_n)$ und $(\alpha_1, \alpha_2)y(a, \lambda_n) = 0$. Die Folge $\{(\tilde{c}_1(\lambda_n), \tilde{c}_2(\lambda_n))^t\}$

$\subset \mathbf{C}^2$ mit $\widetilde{c}_i = c_i/\sqrt{|c_1|^2+|c_2|^2}\,(i=1,2)$ ist beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $\{(\widetilde{c}_1(\lambda_j), \widetilde{c}_2(\lambda_j))^t\}$. Wir gehen nun von $y(.,\lambda_n)$ über zur Eigenfunktion $\widetilde{y}(.,\lambda_j) = \widetilde{c}_1(\lambda_j)u_2(.,\lambda_j) + \widetilde{c}_2(\lambda_j)u_3(.,\lambda_j)$: Da die Lösungen $u_i(.,z)$ für festes x stetig sind in z und $u_{2,3}(.,\lambda)$ für beliebiges $\lambda \in (-\infty, \lambda_0]$ quadratintegrierbare Lösungen sind, folgt, daß λ selbst ein Eigenwert ist: $(\alpha_1,\alpha_2)\widetilde{y}(a,\lambda) = 0$ für beliebige s.a. Randbedingung (α_1,α_2). Dann aber folgt $y(.,\lambda) \in D_{T_0}$, also $y \equiv 0$: H_a besitzt in $(-\infty, c_0)$ kein wesentliches Spektrum.

Bleibt zu zeigen, daß H_a halbbeschränkt ist. Indirekter Beweis: Sei $\lambda_0 < c_0$ beliebig, aber fest gewählt. Angenommen $\lambda \in (-\infty, \lambda_0]$ ist Eigenwert von H_a zur Eigenfunktion $y(x,\lambda)$: $y(x,\lambda) = c_1\, u_2(x,\lambda) + c_2\, u_3(x,\lambda)$ mit $c_i = c_i(\lambda)$ und $(c_1,c_2) \neq (0,0)$. Wegen der Dirichletrandbedingung gilt

$$c_1 \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} (a,\lambda) + c_2 \begin{pmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{pmatrix} (a,\lambda) = 0\,.$$

Wir zeigen: für hinreichend kleine λ gilt $\{u_{2,1}\, u_{3,2} - u_{3,1}\, u_{2,2}\}(a,\lambda) \neq 0$, also $c_1 = c_2 = 0$. Eine direkte Rechnung zeigt: $\{u_{2,1}\, u_{3,2} - u_{3,1}\, u_{2,2}\}(a,\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\nu_3(a,\lambda) + \nu_1(a,\lambda)\,(1 + r(a,\lambda)) = 0$ gilt, wobei $r(a,\lambda)$ für hinreichend großes $a = a(\lambda_0)$ in einer kleinen Umgebung $U_\gamma(0)$ liegt (gleichmäßig in λ: $\gamma = \gamma(a,\lambda_0)$). Dieses steht im Widerspruch zu: $Re\ \nu_3(a,\lambda) = -Re\ \nu_1(a,\lambda) < 0$, $Im\ \nu_3(a,\lambda) = Im\ \nu_1(a,\lambda) > 0$ und $\lim_{\lambda\to-\infty} \arg(\nu_1(a,\lambda)) \to \pi/4$ $(= \pi/4$ für $\widetilde{p}(a) = 0)$. H_a ist also halbbeschränkt.

Abschließend sei erwähnt, daß die Halbbeschränktheit alternativ auch mit den Methoden der Oszillationstheorie bewiesen werden kann (vgl. Beweis zu Satz 5.6). □

Bemerkung 4.4 *Die Quadratische Form, der Formbereich einer s.a Realisierung [50, Band I] (wir benutzen die Dirichletrandbedingung), sowie das Min-Max Prinzip [50, Band IV] zeigen: Verschiebung von r, p, q nach oben bzw. nach unten verschiebt die untere Schranke des wesentlichen Spektrums nach oben bzw. nach unten. Operatoren, die nach unten durch Operatoren abgeschätzt werden können, deren Koeffizientenfunktionen die Voraussetzungen von Satz* 4.3 *erfüllen, sind halbbeschränkt.*

Untersuchungen über Operatoren zweiter Ordnung legen die Vermutung nahe, daß in Satz 4.3 c_0 ersetzt werden kann durch $c_0^- := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x) - (\widetilde{p}_-)^2(x)/4\}$. Dabei

bezeichnet $\tilde{p}_-$ den Negativteil: $\tilde{p} = \tilde{p}_+ + \tilde{p}_-$.
Da die Funktionen $\mu_k(x, \lambda)$ für $\lambda \in (c_0, c_0^-)$ nicht mehr notwendigerweise paarweise verschieden sind, können wir in diesem Bereich nicht asymptotisch integrieren:
Setze — beispielsweise — $r = w \equiv 1$, $q \equiv 0$ und $p(x) = \cos(x^\alpha) + 1$ mit $0 < \alpha < 1/2$. Dann sind zwar die Bedingungen der As. In. erfüllt, aber $\mu_k(x, \lambda)$ sind für $\lambda \in [-1, 0]$ nicht paarweise verschieden. Der Trick besteht nun darin, p durch eine geeignete Funktion $f \leq p$ zu ersetzen derart, daß f die Bedingungen der As. In. erfüllt und die Funktionen $\mu_k(x, \lambda, f)$ paarweise verschieden sind auf $[a, \infty) \times (-\infty, \lambda_0]$ ($\lambda_0 < c_0^- = 0$ beliebig, aber fest gewählt, $a = a(\lambda_0)$). Durch Wiederholung der im Beweis zu Satz 4.3 vorgetragenen Argumente (ersetze $\tilde{p}$ durch f) folgt mit der Quadratischen Form: $\sigma_{ess}(H) \subset [0, \infty)$ (in Übereinstimmung mit Satz 3.4). Durch dieses Beispiel motiviert gelangen wir zu

Korollar 4.5 *$\tilde{p}$, $\tilde{q}$ seien beschränkt, die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt und $c_0^- := \liminf_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x) - (\tilde{p}_-)^2(x)/4\}$. Dann gilt $\sigma_{ess}(H) \subset [c_0^-, \infty)$.*

Beweis: Besitzt p_s auf $[a, \infty)$ konstantes Vorzeichen, so ist die Behauptung im Fall $p_s < 0$ trivialerweise richtig (Satz 4.3). Gilt $p_s \geq 0$, so liefert Satz 3.4 bzw. Korollar 4.6 ein besseres Resultat: keine bzw. reduzierte Bedingungen der asymptotischen Integration, und die Voraussetzung der Beschränktheit wird ersetzt durch Halbbeschränktheit.
Man kann aber auch argumentieren wie in dem Fall, daß p_s unendlich viele Nullstellen besitzt: Setze $\lambda_0 < c_0^-$ (λ_0 beliebig, aber fest) und approximiere p_s durch eine hinreichend glatte Funktion $f = f_+ + f_-$ mit $f_- = p_{s,-}$ und $0 \leq f_+(x) \leq p_{s,+}(x)$ hinreichend klein derart, daß $4\,\tilde{q}(x) - (f^2/rw)(x) - 4\lambda \geq d > 0$ auf $[a, \infty) \times (-\infty, \lambda_0]$ gilt und f die Bedingungen der As. In. erfüllt (die Existenz von f folgt aus den Bedingungen der As. Int. an p_s: wir können $p_{s,+}$ glatt abschneiden). Die auf diese Weise erhaltenen Funktionen $\mu_k(x, \lambda, f)$ sind also paarweise verschieden auf $[a, \infty) \times (-\infty, \lambda_0]$. Bezeichnet nun τ_f den Operator, der aus τ hervorgeht, wenn man p_s durch f ersetzt, so können wir auf τ_f die Argumentation aus dem Beweis zu Satz 4.3 anwenden (ersetze p_s durch f): $\sigma_{ess}(H_f) \subset [c_0^-, \infty)$. Mit Bemerkung 4.4 folgt die Behauptung: $\sigma_{ess}(H) \subset [c_0^-, \infty)$. $\square$

Aufgrund der Quadratischen Form sollte man erwarten können, daß die in Satz 4.3 getroffene Voraussetzung der Beschränktheit von $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ ersetzt werden kann durch Halbbeschränktheit. Dieses ist der Fall. Darüberhinaus reduzieren sich die Bedingungen der As. In. im wesentlichen auf Bedingungen an r und w:

Korollar 4.6 *$\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ seien beschränkt nach unten, und es gelte* (4.1), (4.2), *sowie*

$$P^{-1}\left[\frac{r'}{r},\ \frac{w'}{w}\right] \to 0\,, \quad P^{-1/2}\left[\frac{r'}{r},\ \frac{w'}{w}\right] \in L_2\,, \quad P^{-1}\left[\frac{r''}{r},\ \frac{w''}{w}\right] \in L_1\,. \tag{4.9}$$

Setzt man $p_0 = \liminf_{x\to\infty}\ \widetilde{p}_-(x)\,,\quad q_0 = \liminf_{x\to\infty}\ \widetilde{q}(x)\,,\quad c_0' = q_0 - p_0^2/4\,,$ *so sind die selbstadjungierten Realisierungen H halbbeschränkt mit*

$$\sigma_{ess}(H) \subset [c_0', \infty)\,.$$

Unter obigen Voraussetzungen besitzt H im Fall $\widetilde{q}(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ also rein diskretes Spektrum.

Beweis:
Wähle $a = a(\gamma)$, $\gamma > 0$, so, daß für $x > a$ gilt: $\widetilde{p}_-(x) > p_0 - \gamma =: d_1$, $\widetilde{q}(x) > q_0 - \gamma =: d_2$ und definiere τ_0 durch

$$\tau_0\, y = w^{-1}[(ry'')'' - ((d_1(rw)^{1/2} + p_i + p_c)y')' + (d_2 w + q_i + q_c)y].$$

Die quadratische Form (3.37) zeigt: $\langle \tau\, y, y\rangle_{[a,\infty)} > \langle \tau_0\, y, y\rangle_{[a,\infty)}$ für y aus dem Formbereich der s.a. Realisierung von τ mit Dirichletrandbedingung. Auf τ_0 wende nun Satz 4.3 an ($p_s = p_1 = d_1\,(rw)^{1/2}$, $q_s = q_1 = d_2\, w$, $p_2 = q_2 = 0$; es ist also $\widetilde{p} = d_1$, $\widetilde{q} = d_2$ beschränkt), so daß die Behauptung nun mit $\gamma \to 0$ und Bemerkung 4.4 folgt.
Im Fall $\widetilde{q} \to \infty$ ersetze d_2 durch eine beliebige Zahl $N > 0$, wähle $a = a(\gamma, N)$ und verfahre wortwörtlich wie gerade geschehen. □

Fall 2: Nach Konstruktion ist $\widetilde{p}$ für hinreichend große x von 0 weg beschränkt, d.h. p_s besitzt konstantes Vorzeichen. Im Fall $p_s > 0$ besitzen die s.a. Realisierungen H in (c_1, c_2) diskretes Spektrum mit den einzig möglichen Häufungswerten in c_1, c_2 (für $\epsilon = 0$ sind u_2, u_3 quadratintegrierbar, u_1, u_4 nicht). Bleibt der Fall $p_s < 0$ zu untersuchen:

Satz 4.7 *$\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ seien beschränkt, die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt und* $c_1 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x) - \widetilde{p}^2(x)/4\}$, $c_2 := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}$ *mit* $c_1 < c_2$. *p_s besitze für hinreichend große x negatives Vorzeichen. Dann gilt für selbstadjungierte Realisierungen H:*

$$\sigma_{sc}(H) \cap (c_1, c_2) = \emptyset\,, \quad [c_1, c_2] \subset \sigma_{ac}(H) \textit{ der spektralen Vielfachheit } 2$$

und H hat in (c_1, c_2) keine eingebetteten Eigenwerte.

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert zu gegebenen $\lambda_1 > c_1$ und $\lambda_2 < c_2$ ein $a = a(\lambda_1, \lambda_2)$ so, daß auf $[a,\infty)\times[\lambda_1,\lambda_2]$ gilt: $0 < d_1 \leq 4\,\widetilde{q} - 4\,\lambda$ und $0 < d_2 \leq \sqrt{\widetilde{p}^2 - 4\,\widetilde{q} + 4\,\lambda} < |\widetilde{p}|$ für Konstanten $d_i = d_i(a, c_i)$. Für $\epsilon = 0$ gilt also auf $[a,\infty)\times[\lambda_1,\lambda_2]$: Die Eigenwerte sind paarweise verschieden mit $Re\ \nu_i(x,\lambda) = 0$ $(1 \leq i \leq 4)$, und (3.34) zeigt zusammen mit $\int_a^\infty P(t)\,dt = \infty$, daß es für $\epsilon = 0$ keine quadratintegrierbare Lösung gibt.

Nach Lemma 4.2 ist die M-Matrix gegeben durch (3.36). Einerseits ist die Vielfachheit des stetigen Spektrums des durch Zerlegung erhaltenen Operators H_a höchstens 2, andererseits folgt mit (3.36) ($\mathrm{Im}\ M(z) = (2\,i)^{-1}\,(M(z) - M^*(z))$):

$\lim_{\epsilon\to 0+}\ \mathrm{Im}\ M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon) =$

$$(rw)^{1/2}(c)\begin{pmatrix} P\,|\nu_1|\,|\nu_3|\,(|\nu_3| - |\nu_1|)\,(1 + r_1) & |\nu_1|\,|\nu_3|\,r_2 \\ |\nu_1|\,|\nu_3|\,r_3 & P^{-1}\,(|\nu_3| - |\nu_1|)\,(1 + r_4)\end{pmatrix}(c,\lambda)\,, \tag{4.10}$$

mit $r_i(c,\lambda)$ klein und $\sqrt{2}\,|\nu_{1,3}|(c,\lambda) = \sqrt{|\widetilde{p}|(c) \mp \sqrt{\widetilde{p}^{\,2}(c) - 4\widetilde{q}(c) + 4\lambda}}$. Es ist also (benutze die Voraussetzungen) die Determinante $|\mathrm{Im}\, M_\alpha(\lambda)| = \{rw|\nu_1||\nu_3|(|\nu_3| - |\nu_1|)^2(1 + r)\}(c,\lambda) \neq 0$, d.h. $\lim_{\epsilon\to 0+}$ *Im* $M_\alpha(\lambda + i\epsilon)$ hat maximalen Rang. Somit besitzen die s.a. Realisierungen (in $L_2([0,\infty), w\,dx)$) nach Satz 2.15 kein singulär stetiges Spektrum in (c_1, c_2), während die Vielfachheit des absolut stetigen Spektrums von H_a gleich 2 ist ($d\rho_{ac}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0+}\ \mathrm{Im}\ M(\lambda + i\,\epsilon)\,d\lambda$, vgl. [58]). Nach *Referenz* besitzt somit jede s.a. Realisierung in (c_1, c_2) absolut stetiges Spektrum der VFH 2. □

Bleibt **Fall** 3:

Satz 4.8 *$\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ seien beschränkt, die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt und $c_3 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}$. Dann gilt für selbstadjungierte Realisierungen H:*

$$\sigma_{sc}(H) \cap (c_3, \infty) = \emptyset\,, \quad [c_3, \infty) \subset \sigma_{ac}(H) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1$$

und die Eigenwerte besitzen in (c_3, ∞) keinen Häufungswert.

Beweis:

Sei $A_3 \subset (c_3, \infty)$ eine beliebige, aber fest gewählte kompakte Teilmenge. Nach Voraussetzung existiert ein $a = a(A_3)$ derart, daß auf $[a, \infty) \times A_3$ gilt: $0 < d \leq -4\,\widetilde{q} + 4\,\lambda$. Die Eigenwerte sind paarweise verschieden mit Re $\nu_1(x, \lambda) \geq c > 0$ und Re $\nu_3(x, \lambda) = 0$: für $\epsilon = 0$ ist nur $u_2(., \lambda)$ quadratintegrierbar.

Mit (3.36) erhalten wir $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ Im $M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon) =$

$$(rw)^{1/2}(c) \begin{pmatrix} P\,|\nu_1|^2\,|\nu_3|\,(1 + r_1) & |\nu_1|\,|\nu_3|\,(1 + r_2) \\ |\nu_1|\,|\nu_3|\,(1 + r_3) & P^{-1}\,|\nu_3|\,(1 + r_4) \end{pmatrix} (c, \lambda) \tag{4.11}$$

mit $r_i(c, \lambda)$ klein und $\sqrt{2}\,|\nu_{1,3}|(c, \lambda) = \sqrt{\pm\widetilde{p}(c) + \sqrt{\widetilde{p}^{\,2}(c) - 4\widetilde{q}(c) + 4\lambda}}$. Der Rang von $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ *Im* $M(\lambda + i\epsilon)$ ist also größer gleich 1. Hieraus folgt mit Satz 2.15 die Aussage über das singulär stetige Spektrum, während mit Satz 2.8 und *Referenz* die Behauptung über das absolut stetige Spektrum folgt (nach Satz 2.8 ist die VFH von $\sigma_{ac}(H_a) \cap (c_3, \infty)$ kleiner gleich 1).

Bleibt zu zeigen, daß mögliche Eigenwerte sich nicht in (c_3, ∞) häufen:

Vorbereitend bemerken wir, daß $u_{1,2}(x, \lambda)$ für festes x eine analytische Fortsetzung in $L_0^- := A_3 \times (-\delta, \delta)$ besitzen: Hierzu setze die Funktionen $\mu_k(x, z)$ stetig in L_0^- fort, es ist also ($\epsilon \in [0, \delta)$) Re $\widetilde{\Delta}(x, \lambda, -\epsilon) =$ Re $\widetilde{\Delta}(x, \lambda, \epsilon)$, Im $\widetilde{\Delta}(x, \lambda, -\epsilon) = -$ Im $\widetilde{\Delta}(x, \lambda, \epsilon)$ und Re $\nu_{1,3}(x, \lambda, -\epsilon) = \pm$ Re $\nu_{1,3}(x, \lambda, \epsilon)$, Im $\nu_{1,3}(x, \lambda, -\epsilon) = \mp$ Im $\nu_{1,3}(x, \lambda, \epsilon)$. Hieraus folgt unmittelbar, daß $\mu_{1,2}$ die Dichotomiebedingung auch auf $[a, \infty) \times L_0^-$ erfüllen ($\mu_{3,4}$ natürlich nicht); desweiteren ist offensichtlich, daß (3.24), (3.23) und (3.29) unter den Bedingungen der Asymptotischen Integration auch für $z \in L_0^-$ erfüllt sind, so daß die Behauptung nun aus dem Zusatz zum Satz von Levinson folgt.

Hieraus wiederum folgt [14], daß $u_2(x, z)$ für festes $x \geq 0$ analytisch ist in z. Ist nun

$\lambda \in (c_3, \infty)$ ein Eigenwert einer s.a. Realisierung (in $L_2([0,\infty),\, w\,dx)$), so erfüllt λ eine Gleichung der Form $(\alpha_1, \alpha_2)u_2(0,\lambda) = 0$. Somit folgt die Behauptung aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen. $\square$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts nochmals für den wichtigen Spezialfall zusammen, daß $\widetilde{p}$ und $\widetilde{q}$ konvergieren:

Satz 4.9 *Es gelte* $\lim_{x\to\infty} \widetilde{p}(x) = p_0$, $\lim_{x\to\infty} \widetilde{q}(x) = q_0$, *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann sind die selbstadjungierten Realisierungen H halbbeschränkt (nach unten) und besitzen kein sigulär stetiges Spektrum ($\sigma_{sc}(H) = \emptyset$). H besitzt*

- *im Fall $p_0 \geq 0$ in $(-\infty, q_0)$ diskretes Spektrum und in $[q_0, \infty)$ absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 1. Die möglicherweise vorhandenen Eigenwerte können sich höchstens in q_0 sowie in $+\infty$ häufen.*
- *im Fall $p_0 < 0$ in $(-\infty, q_0 - p_0^2/4)$ diskretes Spektrum, in $[q_0 - p_0^2/4, q_0]$ absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 2 und in $[q_0, \infty)$ absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 1. H besitzt in $(q_0 - p_0^2/4, q_0)$ keine eingebetteten Eigenwerte, und die Eigenwerte können sich höchstens in $q_0 - p_0^2/4$, q_0 sowie in $+\infty$ häufen.*

Wir beenden die Untersuchungen dieses Kapitels mit einigen Randnotizen:
[53, Sätze 4.4, 4.5, 5.6] sind Spezialfälle von Satz 4.8 bzw. Satz 3.4.
In Korollar 4.6 (Halbbeschränktheit) haben wir die Bedingungen der As. In. reduziert auf Bedingungen an r, w, sowie an den integrierbaren und bedingt integrierbaren Ausdücken.

Bemerkung 4.10 *Falls die Bedingungen* (4.1), (4.2) *nicht erfüllt sind, so bleibt die Aussage von Korollar* 4.6 *dennoch richtig, wenn man in den Voraussetzungen $\widetilde{p}$ durch $p\,(rw)^{-1/2}$ und $\widetilde{q}$ durch $q\,w^{-1}$ ersetzt und r, w der Bedingung* (4.9) *genügen.*
Beweis: *Analog zum Beweis von Korollar* 4.6. $\square$

Im Fall $\liminf_{x\to\infty} r(x) > 0$ schließlich ist es hinreichend, wenn nur w der Bedingung (4.9) genügt (c_0' ändert sich entsprechend), d.h. die Bedingung an r ist nur im Fall $\liminf_{x\to\infty} r(x) = 0$ notwendig.

Bemerkung 4.11 *Sei* $\tau y = y^{(4)} + c\cos(x^\alpha)\,y$ *mit* $0 < \alpha$ *und einer Konstanten* c. *Nach Bemerkung* 4.10 *bzw. Korollar* 4.6 *gilt für beliebiges* $\alpha > 0$: *Die selbstadjungierten Realisierungen* H *sind halbbeschränkt mit* $\sigma_{ess}(H) \subset [-|c|, \infty)$. *Für* $0 < \alpha < 1$ *und hinreichend große* x *oszilliert* $\cos(x^\alpha)$ *nur schwach. Wie in* [7] *kann man also mit Hilfe einer singulären Folge zeigen, daß in diesem Fall* $\sigma_{ess}(H) = [-|c|, \infty)$ *gilt (zur Konstruktion einer singulären Folge benutze man beispielsweise die Funktion* $\cos((\lambda + |c|)^{1/4}x)$, $\lambda > -|c|$). *Satz* 4.8 *wiederum zeigt:* $[|c|, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$ *der spektralen Vielfachheit* 1 *für* $\alpha < 1/2$.

Die Schranke 1/2 entsteht durch die Bedingungen der As. In., genauer gesagt dadurch, daß wir in dieser Arbeit den glatten Anteil $C_s(x,z)$ zweimal diagonalisiert haben. Über das Intervall $[-|c|, |c|]$ kann mit den Methoden dieser Arbeit – wie bereits mehrfach erläutert – keine weitergehende Aussage getroffen werden.

Kapitel 5

$\widetilde{q} \to +\infty$

Nach Satz 3.4 sind die selbstadjungierten Realisierungen im Fall $\frac{q}{w} \to +\infty$ und $p \geq 0$ halbbeschränkt und besitzen rein diskretes Spektrum. Dieselbe Aussage gilt – im Rahmen der asymptotischen Integration – nach Korollar 4.6 für den Fall, daß $\widetilde{p}$ nach unten beschränkt ist und $\widetilde{q} \to +\infty$ gilt.
Wie verhalten sich die Operatoren im Fall $\widetilde{q}(x) \to +\infty$, $\widetilde{p}(x) \to -\infty \ (x \to \infty)$?
Um die Frage beantworten zu können, sind weitere Annahmen über das asymptotische Verhalten von $\widetilde{p}$ und $\widetilde{q}$ zu treffen. Hierbei lassen wir uns in diesem Kapitel von dem Gedanken leiten, daß die Eigenschaft der Quadratintegrierbarkeit nach (3.34) neben den Vorfaktoren $\widetilde{\Delta}$, ν_k stark vom Verhalten von $\operatorname{Re} \nu_k$ abhängt:
Im ersten Abschnitt untersuchen wir den Fall $4\,\widetilde{q} - \widetilde{p}^2 \to +\infty$, wobei wir unterscheiden, ob $\widetilde{p}^{\,2}$ stark oder schwach von $\widetilde{q}$ dominiert wird. Präzise formuliert unterscheiden wir die Fälle $(x \to \infty)$

$$1.\ (1-\gamma)\,4\,\widetilde{q}(x) - \widetilde{p}^2(x) \to \infty\,, \quad \gamma \in (0,1)$$

$$2.\ \left[f^2 := 4\,\widetilde{q} - \widetilde{p}^2\,, \quad g^2 := -\widetilde{p}\right](x) \quad \to \infty\,, \quad f = o(g^2)$$

und finden in beiden Fällen folgende Antwort:

- Der Defektindex ist entweder minimal oder aber maximal.
- Die s.a. Realisierungen besitzen rein diskretes Spektrum und sind im minimalen Defektfall halbbeschränkt nach unten (Sätze 5.6, 5.10).

Gilt jedoch $4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2 \to -\infty$, so erzeugt bereits eine schwache Dominanz von $\tilde{p}$ ein völlig verändertes spektrales Verhalten: In den Fällen $(x \to \infty)$

1. $p_s < 0\,, \quad (1-\gamma)\,\tilde{p}^{\,2}(x) - 4\,\tilde{q}(x) \to \infty\,, \qquad \gamma\,\tilde{p}^2 \le \tilde{q}$

2. $\Big[h^2 := \tilde{p}^2 - 4\,\tilde{q}\,, \quad g^2 := -\tilde{p}\Big](x) \quad \to \infty\,, \quad h = o(g^2)$ gilt:

- Der Defektindex ist entweder minimal oder aber maximal.
- Im minimalen Defektfall besitzen die s.a. Operatoren im Fall
  1. rein absolut stetiges Spektrum der spektralen Vielfachheit 2: $\sigma(H) = \sigma_{ac}(H) = (-\infty, \infty)$ (Satz 5.12).
  2. rein stetiges Spektrum: $\sigma(H) = \sigma_c(H) = (-\infty, \infty)$ (Satz 5.15).

In allen Fällen wählen wir den Spektralparameter z wie folgt:

$$z = \lambda + i\epsilon \;\text{ mit }\; (\lambda, \epsilon) \in L_0 := K \times [0, \delta)$$

mit einer beliebig, aber fest gewählten reellen kompakten Menge K und kleinem $\delta > 0$.

5.1 Halbbeschränkte Operatoren mit diskretem Spektrum

5.1.1 $(1-\gamma)\,4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2 \to \infty\,, \quad \gamma \in (0,1)$

As. In.: Schreiben wir abkürzend $f_\lambda^2 := 4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2 - 4\,\lambda\,,$ so existiert nach Voraussetzung (5.1.1) ein hinreichend großes $a = a(K, \delta) > 0$ derart, daß die Eigenwerte μ_i auf $[a, \infty) \times L_0$ paarweise verschieden sind und auf $[a, \infty) \times L_0$ folgende Asymptotik und Entwicklung der Eigenwerte gilt: (A) $f_\lambda^2 \ge c\,(\tilde{q} - \lambda)$ für eine Konstante $c = c(a, K) \in (0,1)$ und $\tilde{\Delta} = i\,f_\lambda\,(1 + o(1))\,,$

$$\sqrt{2}\,\nu_{1,3} = \sqrt{\tilde{p} \pm i\,f_\lambda} \pm \frac{\epsilon}{f_\lambda\,\sqrt{\tilde{p} \pm i\,f_\lambda}} + O\left(\frac{\epsilon^2}{f_\lambda^3\,\sqrt{\tilde{p} \pm i\,f_\lambda}}\right) = \sqrt{\tilde{p} \pm i\,f_\lambda}\,(1 + o(1))\,. \quad (5.1)$$

Die Eigenwerte μ_i sind also von gleicher Größenordnung, $\boxed{\widetilde{\Delta}\,, \nu_i^2 \approx \widetilde{q}^{\,1/2}\,, \quad \mu_i \approx P_q}$, und nun zeigt eine direkte Rechnung, daß die **Bedingungen der asymptotischen Integration** gegeben sind durch (in nachfolgenden Formeln setze $q = q_s$, $r = r_s$, $w = w_s$):

$$P_c(x) := \int_\infty^x p_c(t)\,dt\,, \quad Q_c(x) := \int_\infty^x q_c(t)\,dt\,, \quad P_q := \left(\frac{q}{r}\right)^{1/4}$$

$$P_q^{-1}\,\frac{P_c}{r}\,,\; P_q^{-1}\,\frac{Q_c}{(r\,q)^{1/2}} \;\to 0 \tag{5.2}$$

$$P_q\,\frac{p_i}{(r\,q)^{1/2}}\,,\; P_q\,\frac{q_i}{q}\,,\; \frac{P_c}{r}\,,\; P_q^{-1}\,\frac{P_c^2}{r^2}\,,\; \frac{Q_c}{(r\,q)^{1/2}} \;\in L_1 \tag{5.3}$$

$$\left[\frac{p_2'}{(r\,q)^{1/2}}\,,\; \frac{q_2'}{q}\,,\; \frac{r_2'}{r}\,,\; \frac{w_2'}{q}\right] \in L_1 \tag{5.4}$$

$$P_q^{-1}\,\left[\frac{p_1'}{(r\,q)^{1/2}}\,,\; \frac{q_1'}{q}\,,\; \frac{r_1'}{r}\,,\; \frac{w_1'}{q}\right] \to 0 \tag{5.5}$$

$$P_q^{-1/2}\,\left[\frac{p_1'}{(r\,q)^{1/2}}\,,\; \frac{q_1'}{q}\,,\; \frac{r_1'}{r}\,,\; \frac{w_1'}{q}\right] \in L_2 \tag{5.6}$$

$$P_q^{-1}\,\left[\frac{p_1''}{(r\,q)^{1/2}}\,,\; \frac{q_1''}{q}\,,\; \frac{r_1''}{r}\,,\; \frac{w_1''}{q}\right] \in L_1 \tag{5.7}$$

Hierbei entsprechen (5.2) der Rücktransformation, (5.3), (5.4) der Bedingung $||S(x,z)|| \leq \rho(x)$ mit $\rho \in L_1$, (5.5) der Bedingung $Q(x,z) \to 0$ und (5.6), (5.7) der Bedingung $||R_1(x,z)\,Q(x,z)||\,,\,||Q'(x,z)|| \;\leq \rho(x)$ mit $\rho \in L_1$. Die Lösungen sind somit gegeben durch (3.30) mit den dort angegebenen Eigenschaften.

Bemerkung 5.1 *Dieser neue Satz asymptotischer Bedingungen entsteht aus* (4.1)–(4.6), *indem man P durch P_q und w durch q_s ersetzt, entspricht also dem Übergang von $\widetilde{q}$ beschränkt zu $\widetilde{q}$ unbeschränkt.*

Bemerkung 5.2 *Für unsere Zwecke ist es hinreichend, λ aus einer kompakten Menge zu wählen. Tatsächlich kann aber, wie im beschränkten Fall, gleichmäßig in $z \in L_0 := (-\infty, \lambda_0) \times [0, \delta)$, $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ beliebig, aber fest, integriert werden (benutze (A)). Allerdings fallen die Bedingungen an w etwas stärker aus: In* (5.4)–(5.7) *ersetze w_i'/q_s, w_1''/q_s durch w_i'/w bzw. w_1''/w $(i = 1, 2)$.*

Quadratintegrierbare Lösungen für $\epsilon \geq 0$: Mit den Abkürzungen

$$L_\pm(x,\lambda) := \sqrt{\tilde{p}(x) \pm i\, f_\lambda(x)}\,, \quad |L| := \sqrt{2}\,(\tilde{q}-\lambda)^{1/4} = \sqrt{2}\,\tilde{q}^{\,1/4}(1+o(1))\ (x\to\infty)$$

gilt $Re\ L_- = -Re\ L_+\,,\ Im\ L_- = Im\ L_+$. Aus der Voraussetzung (5.1.1) folgt, daß Konstanten $c_i = c_i(a,K) > 0$ existieren derart, daß auf $[a,\infty)\times L_0$ gilt: $0 < c_{1,2}\,|L| \leq \mathrm{Im}\ L_+,\ \mathrm{Re}\ L_+ \leq |L|\,,$ also nach (5.1):

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ \nu_{1,3} = \pm Re\ L_+\ (1+o(1)) \qquad (|\mathrm{Re}\ \mu_i| \approx P_q)\,.$$

Mit (3.34) und (5.1.1) folgt (alle Konstanten c_i sind strikt positiv)

$$\begin{aligned}\int_a^\infty u_{2,3}^*\,A\,u_{2,3}\,dx &\leq c_0\int_a^\infty \frac{P}{\tilde{q}^{3/4}}\exp\left(-c_1\int_a^x P\,dt\right)dx\\ &\leq c_0\int_a^\infty P\,\exp\left(-c_1\int_a^x P\,dt\right)dx < \infty \qquad (5.8)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_a^\infty u_{1,4}^*\,A\,u_{1,4}\,dx &\approx \int_a^\infty \frac{P}{\tilde{q}^{3/4}}\exp\left(c_2\int_a^x P\,\tilde{q}^{\,1/4}\,dt\right)dx\\ &= \int_a^\infty \frac{P_q}{\tilde{q}}\exp\left(c_2\int_a^x P_q\,dt\right)dx := I\,,\quad \tilde{q} = q_s/w\,. \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Lemma 5.3 *Es gelte* (5.1.1), *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Mit I aus* (5.9) *gilt: Im Fall $I=\infty$ ist der Defektindex minimal, im Fall $I<\infty$ maximal. Im minimalen Defektfall ist die M-Matrix gegeben durch* (3.36).

Bemerkung 5.4 *Die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Eine zum letzten Kapitel analoge Argumentation (benutze* (5.4), (5.5)*) zeigt, daß $P_q(.) \notin L_1[a,\infty)$ gilt. Nach* (5.1.1) *und* (5.9) *ist $P_q\,\tilde{q}^{-1} \notin L_1[a,\infty)$ hinreichend für minimalen Defekt. Im Fall $P_q\,\tilde{q}^{-1} \in L_1$ ist minimaler oder aber maximaler Defekt möglich.*

Bemerkung 5.5 *Beispiele für minimalen Defektfall sind leicht konstruiert (z.B. $p\equiv 0$, $r = w \equiv 1$, $q(x) = q_1(x) = cx^\alpha$ mit Konstanten $c,\alpha > 0$). Eine naheliegende Frage lautet also, ob unter den Bedingungen der As. In. der maximale Defektfall realisiert werden kann. Dieses ist der Fall.*

Als einfachstes Beispiel sei erwähnt: $p \equiv 0$, $q = r \equiv 1$, $w(x) = w_1(x) = \exp(-c\,x)$ *mit einer Konstanten* $c > 0$. *Dann sind die Bedingungen der As. In. erfüllt, und der Defektindex ist für* $c > \sqrt{2}$ *maximal (benutze* (3.7) *und* (3.34)). *Für* $0 < c \leq \sqrt{2}$ *hingegen ist der Defektindex minimal.*

Im maximalen Defektfall besitzen die s.a. Realisierungen rein diskretes Spektrum; im minimalen Defektfall gilt

Satz 5.6 (5.1.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann sind die selbstadjungierten Realisierungen* H *halbbeschränkt und besitzen rein diskretes Spektrum:*

$$\sigma_{ess}(H) = \emptyset\,.$$

Beweis: Dieser verläuft, abgesehen von der Aussage über die Halbbeschränktheit, analog zum Beweis von Satz 4.3. Also sind folgende Hinweise hinreichend:
$\sigma_c(H) = \emptyset$: Nach (5.8) sind $u_2(.,\lambda)$, $u_3(.,\lambda)$ $(\epsilon = 0)$ für beliebiges $\lambda \in (-\infty,\infty)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen von $\tau_A\,y = \lambda\,y$ auf $[a,\infty)$. Da der Defektindex nach Voraussetzung minimal ist, folgt die Behauptung nun nach Satz 2.8.
$\sigma_{ess}(H) = \emptyset$: Argumentiere wie im Beweis zu Satz 4.3.
Halbbeschränktheit:
Unter Berücksichtigung von Bemerkung 5.2 können wir einerseits argumentieren wie im Beweis zu Satz 4.3: Es gilt $\lim_{\lambda\to-\infty} \arg(\nu_1(a,\lambda)) \to \pi/4$ $(= \pi/4$ für $\widetilde{p}_s(a) = 0)$ und $Re\ \nu_3(a,\lambda) = -Re\ \nu_1(a,\lambda) < 0\,,\ \ Im\ \nu_3(a,\lambda) = Im\ \nu_1(a,\lambda) > 0\,.$ Eine zum Beweis von Satz 4.3 analoge Argumentation (u_1, $u_4 \notin L^2_A$: $I = \infty$) zeigt nun die Behauptung. Tatsächlich sind aber die stärkeren Bedingungen der As. In. an w nicht erforderlich:
Alternativ und unter den schwächeren Bedingungen der As. In. (5.2)–(5.7) läßt sich Halbbeschränktheit auch mit den Methoden der Oszillationstheorie beweisen (siehe [27, S. 40 ff.]): Wir zeigen, daß ein hinreichend großes a und ein hinreichend großes L existieren, derart, daß für alle $b \geq a + L$ die Gleichung $\tau\,y = \lambda\,y$ für ein fest gewähltes $\lambda \in (-\infty,\infty)$ keine nichttriviale Lösung $y(x,\lambda)$ mit $y^{(k)}(a,\lambda) = y^{(k)}(b,\lambda) = 0$

($k=0,1$) besitzt. Nach Oszillationstheorie (vgl. [10, Satz 7.4]) folgt dann die Halbbeschränktheit.

Da wir (3.3) diesmal nur für festes λ zu lösen brauchen, besitzen die Lösungen (3.30) die zusätzliche Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} r_j(x,\lambda)=0$ (vgl. [22, Satz 1.3.1]). Im Folgenden wird die Abhängigkeit von λ in der Notation nicht mehr berücksichtigt.

Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen $\vec{y}(x)=\sum_{j=1}^4 c_j\, u_j(x)$ ist eine nichttriviale Lösung von (3.3) mit $y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0$ oder äquivalent

$$D(a,b)\,(v_1,v_2)^t=0 \tag{5.10}$$

mit $v_i\in\mathbf{C}^2$ und

$$D(a,b):=\begin{pmatrix} A(a) & B(a)\\ A(b) & B(b)\end{pmatrix},\ A(x):=\begin{pmatrix} u_2^1(x) & u_3^1(x)\\ u_2^2(x) & u_3^2(x)\end{pmatrix},\ B(x):=\begin{pmatrix} u_1^1(x) & u_4^1(x)\\ u_1^2(x) & u_4^2(x)\end{pmatrix},$$

wobei u_j^i die i-te Komponente des Lösungsvektors u_j bezeichnet.

(5.10) führt formal auf $F\,v_2=0$ mit $F=F(a,b):=A^{-1}(a)\,B(a)-A^{-1}(b)\,B(b)$. Wir werden zeigen, daß F regulär ist $\forall b\geq a+L$ (a und L hinreichend groß), woraus dann die Regularität von D folgt: $\vec{y}\equiv 0$.

Die Determinante von F berechnet sich formal zu

$$\begin{aligned}|F(a,b)|=-e^{2\int_a^b(\mu_1-\mu_3)(x)\,dx}\,k(b)\Big\{1+k^{-1}(b)\Big(c_1\,e^{-2\int_a^b(\mu_1-\mu_3)(x)\,dx}+\\ +c_2\,g(b)\,e^{-2\int_a^b\mu_1(x)\,dx}+c_3\,f(b)\,e^{2\int_a^b\mu_3(x)\,dx}+e^{\int_a^b(\mu_3-\mu_1)(x)\,dx}\left[c_4\,h_1(b)+c_5\,h_3(b)\right]\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{5.11}$$

mit Konstanten $c_i=c_i(a)\in\mathbf{C}$ und

$$f(x,r):=\frac{\nu_3(1+r_1)-\nu_1(1+r_2)}{\nu_3(1+r_3)+\nu_1(1+r_4)}(x),\ h_{1,3}(x):=\frac{\nu_{3,1}^{1/2}}{\nu_{1,3}^{1/2}}\frac{2\,\nu_{1,3}(1+r_5^{1,3})}{\nu_3(1+r_6^{1,3})+\nu_1(1+r_7^{1,3})}(x)$$

$$g(x)=f(x,\tilde{r}),\quad k(x):=f(x)\,g(x)+h_1(x)\,h_3(x)$$

und $\lim_{x\to\infty}[r_j(x),\tilde{r}_j(x)]=0$. Wir benutzen nun die Aussagen von S. 56 ($\epsilon=0$): Setzen wir $\nu_1(x)=\alpha(x)+i\beta(x)$, so gilt $\nu_3(x)=-\alpha(x)+i\beta(x)$, sowie $|v_i(x)|\approx|\alpha(x)|\approx|\beta(x)|$. Hieraus folgt (für hinreichend große x) die Regularität von $A(x)$, sowie

$$f(x)=i\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}(1+s_1(x)),\ h_{1,3}(x)=-i\frac{\nu_{3,1}^{1/2}(x)}{\nu_{1,3}^{1/2}(x)}\frac{(\pm\alpha(x)+i\beta(x))}{\beta(x)}(1+s_2(x)),$$

also $k(x) = 1 + s_3(x)$ mit $\lim_{x\to\infty} s_j(x) = 0$ $(1 \le j \le 3)$.
Beachtet man nun noch, daß im minimalen Defektfall $\operatorname{Re}\mu_1 = P\alpha \approx P_q \notin L_1(a,\infty)$ gilt, so folgt

$$|F(a,b)| = -e^{4\int_a^b P(x)\,\alpha(x)\,dx}(1 + r(b)) \text{ mit } \lim_{b\to\infty} r(b) = 0\,.$$

Für hinreichend großes a und L gilt also $|F(a,b)| \neq 0 \;\forall b \ge a + L$. □

Wir kommen nun zu dem Fall, daß $\tilde{p}^{\,2}$ nur noch schwach von $\tilde{q}$ dominiert wird:

5.1.2 $\left[f^2 := 4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2\,, \quad g^2 := -\tilde{p}\right] \quad \to \infty\,, \quad f = o(g^2)$

As. In.: Wir wählen $a = a(K)$ hinreichend groß und erhalten auf $[a,\infty) \times L_0$ folgende Asymptotik und Entwicklung der Eigenwerte:

$$\widetilde{\Delta} = i\,f\,(1 + o(1))\,, \quad \sqrt{2}\,\nu_{1,3} = i\,g \pm \frac{f}{2\,g}\,(1 + o(1)) = i\,g(1 + o(1)) \;: \tag{5.12}$$

$$\boxed{\widetilde{\Delta} \approx f\,, \quad \nu_k^2 \approx |\tilde{p}| \approx \tilde{q}^{\,1/2}\,, \quad \mu_k \approx P_q}$$

Im Fall (5.1.1) ist $\tilde{q}$ der dominante Ausdruck. Diesmal jedoch haben wir es hinsichtlich der Bedingungen der asymptotischen Integration (3.23), (3.24) und (3.29) mit zwei Skalen zu tun: $\tilde{q}$ und $4\,\tilde{q} - \tilde{p}^2$.
Dieses hat einerseits zur Folge, daß nicht mehr gleichmäßig in $\lambda \to -\infty$ integriert werden kann, und andererseits, daß die (in $z \in L_0$ gleichmäßigen) **Bedingungen der asymptotischen Integration** gegeben sind durch (5.2)–(5.7) mit zusätzlichen Vorfaktoren $\left(\frac{g^2}{f}\right)^k$ (in nachfolgenden Formeln setze $p = p_s$, $q = q_s$, $r = r_s$, $w = w_s$):

$$P_c(x) := \int_\infty^x p_c(t)\,dt\,, \quad Q_c(x) := \int_\infty^x q_c(t)\,dt\,, \quad P_q := \left(\frac{q}{r}\right)^{1/4}$$

$$P_q\,\frac{g^2}{f}\,\frac{p_i}{p}\,, \;\; P_q\,\frac{g^2}{f}\,\frac{q_i}{q}\,, \;\; \frac{g^2}{f}\,\frac{P_c}{r}\,, \;\; P_q^{-1}\,\frac{g^2}{f}\,\frac{P_c^2}{r^2}\,, \;\; \frac{g^2}{f}\,\frac{Q_c}{(r\,q)^{1/2}} \;\in L_1 \tag{5.13}$$

$$P_q^{-1}\,\frac{P_c}{r}\,, \;\; P_q^{-1}\,\frac{Q_c}{(r\,q)^{1/2}} \;\to 0 \tag{5.14}$$

$$\frac{g^4}{f^2}\left[\frac{p_2'}{p}\,, \;\frac{q_2'}{q}\,, \;\frac{r_2'}{r}\,, \;\frac{w_2'}{q}\right] \in L_1 \tag{5.15}$$

$$P_q^{-1}\,\frac{g^6}{f^3}\left[\frac{p_1'}{p},\,\frac{q_1'}{q},\,\frac{r_1'}{r},\,\frac{w_1'}{q}\right]\to 0 \tag{5.16}$$

$$P_q^{-1/2}\,\frac{g^5}{f^{5/2}}\left[\frac{p_1'}{p},\,\frac{q_1'}{q},\,\frac{r_1'}{r},\,\frac{w_1'}{q}\right]\in L_2 \tag{5.17}$$

$$P_q^{-1}\,\frac{g^6}{f^3}\left[\frac{p_1''}{p},\,\frac{q_1''}{q},\,\frac{r_1''}{r},\,\frac{w_1''}{q}\right]\in L_1 \tag{5.18}$$

Die Lösungen sind gegeben durch (3.30), und nach (5.12) gilt

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\nu_{1,3} = \pm\frac{f}{2\,g}\,(1+o(1))\,, \tag{5.19}$$

also erhalten wir mit (3.34), (5.1.2) und

$$I := \int_a^\infty P\,\frac{f}{g}\,dt\,,\quad J := \int_a^\infty \frac{P}{f\,g}\,dt$$

die Abschätzungen ($\epsilon \geq 0$ und alle Konstanten c_i sind strikt positiv)

$$\begin{aligned}\int_a^\infty (u_{2,3}^*\,A\,u_{2,3})(x,z)\,dx &\leq c_0\int_a^\infty \frac{P}{f\,g}\,\exp\left(-c_1\int_a^x P\,\frac{f}{g}\,dt\right)\,dx\\ &\leq c_0\int_0^I \exp(-c_1\,u)\,du\,<\infty\,,\end{aligned}$$

$$\int_a^\infty u_{1,4}^*\,A\,u_{1,4}\,dx \approx \int_a^\infty \frac{P}{f\,g}\,\exp\left(c_1\int_a^x P\,\frac{f}{g}\,dt\right)\,dx\,:=D.$$

Lemma 5.7 (5.1.2) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Im Fall $D=\infty$ ist der Defektindex minimal, andernfalls maximal.*

Bemerkung 5.8 *Nach* (5.1.2) *gilt $J \leq I$, also folgt: Im Fall $P/(fg) \notin L_1$ ist der Defektindex minimal, im Fall $(Pf)/g \in L_1$ maximal, während im Fall $P/(fg) \in L_1 \wedge (Pf)/g \notin L_1$ minimaler oder aber maximaler Defekt möglich sind.*

Der Vollständigkeit halber (wir werden die Aussage nicht benutzen) notieren wir noch eine weitere Folgerung aus (5.12), d.h. $f = o(g^2)$:

Bemerkung 5.9 *Mit* (3.35) *und* (5.12) *folgt im minimalen Defektfall* ($D=\infty$)*:* $M_\alpha(z) =$

$$(rw)^{1/2}(c)\begin{pmatrix} P\nu_1\nu_3(\nu_1(1+s_1)-\nu_3(1+s_2)) & \nu_1\,\nu_3\,(1+s_3)\\ \nu_1\,\nu_3\,(1+s_4) & -P^{-1}\,(\nu_1(1+s_5)-\nu_3(1+s_6))\end{pmatrix}(c,z)$$

$$= (rw)^{1/2}(c) \begin{pmatrix} P\, g^3\, r_1 & -g^2/2\,(1+r_2) \\ -g^2/2\,(1+r_3) & P^{-1}\, g\, r_4 \end{pmatrix} (c,z)\,,$$

wobei die Reste r_i, s_i dieselben Eigenschaften besitzen wie die Funktionen $r_k(c,z)$ aus (3.35).

Im minimalen Defektfall sind $u_2(.,\lambda)$ und $u_3(.,\lambda)$ zwei linear unabhängige quadrat-integrierbare Lösungen ($\epsilon = 0$). Somit zeigt eine zu den Beweisen der Sätze 4.3, 5.6 analoge Argumentation, daß die s.a. Realisierungen rein diskretes Spektrum besitzen:

Satz 5.10 (5.1.2) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann besitzen die selbstadjungierten Realisierungen H rein diskretes Spektrum:*

$$\sigma_{ess}(H) = \emptyset\,.$$

Im minimalen Defektfall sind die s.a. Realisierungen halbbeschränkt.

Beweis: Nach der Vorbemerkung ist nur noch die Halbbeschränktheit zu zeigen. Hierzu argumentieren wir wie im Beweis zu Satz 5.6 (Oszillationstheorie): Sei $\lambda \in (-\infty, \infty)$ beliebig, aber fest gewählt und $\epsilon = 0$. Setzen wir $\nu_1(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$, so gilt $\nu_3(x) = -\alpha(x) + i\beta(x)$, sowie (benutze (5.12) und (5.19)) $|v_i(x)| \approx |\beta(x)|$ und $\alpha = o(\beta)$.

Eine direkte Rechnung (wir benutzen die Notationen aus Satz 5.6) zeigt nun, daß $A(x)$ für hinreichend große x regulär ist, sowie

$$f(x) = r_1(x)\,,\ g(x) = r_2(x)\,,\ |h_{1,3}(x)| = 1 + r_3(x)\,,\ k(x) = 1 + r_4(x)$$

mit $\lim_{x\to\infty} r_j(x) = 0$ ($1 \le j \le 4$).

Weiter gilt nach Voraussetzung $\operatorname{Re}\mu_1 = P\,\alpha \approx P\,\frac{f}{g} \notin L_1(a,\infty)$, also folgt mit (5.11)

$$|F(a,b)| = -e^{4\int_a^b P(x)\,\alpha(x)\,dx}(1 + r(b)) \text{ mit } \lim_{b\to\infty} r(b) = 0\,.$$

Für hinreichend großes a und L gilt also $|F(a,b)| \neq 0\ \forall b \ge a + L$. $\square$

5.2 Operatoren mit rein (absolut) stetigem Spektrum

Wir zeigen nun, daß ein stärkerer Abfall von $\tilde{p}$ zu (nicht nach unten beschränkten) Operatoren mit rein stetigem Spektrum führt. Wir beginnen mit dem Fall:

5.2.1 $p_s < 0\,, \qquad (1-\gamma)\,\tilde{p}^{\,2} - 4\,\tilde{q} \to \infty\,, \qquad \gamma\,\tilde{p}^2 \le \tilde{q}$

As. In.: Sei $f_\lambda^2 := \tilde{p}^2 - 4\tilde{q} + 4\lambda\,.$
Nach Voraussetzung gilt $\tilde{p}^{\,2} \approx \tilde{q} \to \infty$, und wir können $a = a(K)$ so groß wählen, daß auf $[a,\infty)\times K$ gilt: $0 < c_1 \le\ f_\lambda\,|\tilde{p}|^{-1}\ \le 1 - c_2$ mit Konstanten $c_i = c_i(a,K) > 0$.
Also folgt: $\tilde{\Delta} = f_\lambda\,(1 + o(1))\,,$

$$\sqrt{2}\,\nu_{1,3} = \sqrt{\tilde{p} \pm f_\lambda} \pm \frac{i\,\epsilon}{f_\lambda\,\sqrt{\tilde{p} \pm f_\lambda}} + O\left(\frac{\epsilon^2}{f_\lambda^{7/2}}\right) = i\,\sqrt{-\tilde{p} \mp f_\lambda}\,(1 + o(1))\ :$$

$\boxed{\nu_i^2\,, \tilde{\Delta}\,, f_\lambda \approx \tilde{p} \approx \tilde{q}^{1/2}\,, \quad \mu_i \approx P_q}$ Die Eigenwerte μ_i sind von gleicher Größenordnung, und eine direkte Rechnung zeigt, daß die **Bedingungen der asymptotischen Integration** gegeben sind durch (5.2) - (5.7) ($r\,q_s \approx p_s^2$). Die Lösungen sind also gegeben durch (3.30), und es ist

$$\sqrt{2}\,\mathrm{re}\ \nu_{1,3} = \pm\frac{\epsilon}{f_\lambda\,\sqrt{-\tilde{p} \mp f_\lambda}}\,(1 + o(1)) \quad \boxed{\approx \epsilon\,\tilde{q}^{-3/4} = \epsilon\,P^{-1}\,P_q\,\tilde{q}^{-1}}$$

Mit (3.34) und $I := \int_a^\infty P_q\,\tilde{q}^{-1}\,dt$ folgt für $\epsilon > 0$:

$$\int_a^\infty u_{2,3}^*\,A\,u_{2,3}\,dx \le c_0\,\int_a^\infty P_q\,\tilde{q}^{-1}\,\exp\left(-c_1\,\int_a^x P_q\,\tilde{q}^{-1}\,dt\right)\,dx < \infty\,,$$

$$\int_a^\infty u_{1,4}^*\,A\,u_{1,4}\,dx \approx \int_0^I \exp(c_3\,u)\,du$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Diesmal erhalten wir also scharfe Bedingungen für den Defektindex:

Lemma 5.11 (5.2.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann ist der Defektindex im Fall* $P_q\,q_s^{-1}\,w \notin L_1[a,\infty)$ *minimal und die M-Matrix gegeben durch* (3.36)*. Im Fall* $P_q\,q_s^{-1}\,w \in L_1[a,\infty)$ *liegt maximaler Defektfall vor.*

Spektrum ($P_q\, q_s^{-1}\, w \notin L_1[a,\infty)$):
Für $\epsilon = 0$ gilt $\mathrm{Re}\, \nu_i(x,\lambda) \equiv 0$, und mit (3.34) folgt, daß es im minimalen Defektfall keine quadratintegrierbare Lösung gibt. Einerseits ist die Vielfachheit des stetigen Spektrums des durch Zerlegung erhaltenen Operators H_a höchstens 2, andererseits folgt mit (3.36): $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ Im $M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon) =$

$$(rw)^{1/2}(c) \begin{pmatrix} P\,|\nu_1|\,|\nu_3|\,(|\nu_3| - |\nu_1|)\,(1+r_1) & |\nu_1|\,|\nu_3|\,r_2 \\ |\nu_1|\,|\nu_3|\,r_3 & P^{-1}\,(|\nu_3| - |\nu_1|)\,(1+r_4) \end{pmatrix} (c,\lambda)\,, \tag{5.20}$$

mit $r_i(c,\lambda)$ klein und $\sqrt{2}\,|\nu_{1,3}|(c,\lambda) = \sqrt{|\tilde{p}|(c) \mp \sqrt{\tilde{p}^{\,2}(c) - 4\tilde{q}(c) + 4\lambda}}$. Durch nachrechnen bestätigt man nun, daß $|\mathrm{Im}\, M(\lambda)| = 2rw(\tilde{q} - \lambda)\{(-1 + |\tilde{p}|/\sqrt{4\tilde{q} - 4\lambda})(1 + r_1) + r_2\} \neq 0$ gilt, d.h. $\lim_{\epsilon\to 0^+}$ $Im\ M(\lambda + i\epsilon)$ hat maximalen Rang. Somit besitzen die s.a. Realisierungen (in $L_2([0,\infty), w\,dx)$) nach Satz 2.15 kein singulär stetiges Spektrum, während die Vielfachheit des absolut stetigen Spektrums von H_a gleich 2 ist:

Satz 5.12 (5.2.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt im minimalen Defektfall für selbstadjungierte Realisierungen H:*

$$\sigma_{sc}(H) = \emptyset\,, \quad \sigma_{ac}(H) = (-\infty,\infty) \text{ der spektralen Vielfachheit } 2,$$

und H besitzt keine eingebetteten Eigenwerte, d.h. $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$.

Wir kommen nun zum Analogon von (5.1.2). Da die Vorgehensweise sattsam bekannt ist, können wir uns dementsprechend kurz fassen:

5.2.2 $\left[\, f^2 := \tilde{p}^2 - 4\,\tilde{q}\,, \quad g^2 := -\tilde{p}\,\right] \quad \to \infty\,, \quad f = o(g^2)$

Nach Voraussetzung gilt $\tilde{p}^{\,2} \approx \tilde{q} \to \infty$. Setzen wir $f_\lambda^2 := \tilde{p}^2 - 4\,\tilde{q} + 4\,\lambda$ und wählen $a = a(K)$ hinreichend groß, dann gilt auf $[a,\infty) \times L_0$: $\tilde{\Delta} = f_\lambda\,(1 + o(1))$,

$$\sqrt{2}\,\nu_{1,3} = \sqrt{\tilde{p} \pm f_\lambda} \pm \frac{i\,\epsilon}{f_\lambda\,\sqrt{\tilde{p} \pm f_\lambda}} + O\left(\frac{\epsilon^2}{f^3\,g}\right) = i\,g\,(1 + o(1))\ : \tag{5.21}$$

$\boxed{\tilde{\Delta} \approx f\,, \quad \nu_i^2 \approx \tilde{p} \approx \tilde{q}^{\,1/2}\,, \quad \mu_i \approx P_q}$ Die Eigenwerte μ_i sind von gleicher Größenordnung, die **Bedingungen der asymptotischen Integration** dieselben wie im

Fall (5.1.2) und die Lösungen gegeben durch (3.30).

Mit (3.34), $I := \int_a^\infty P\,(fg)^{-1}\,dt$, sowie

$$\sqrt{2}\,\mathrm{re}\,\nu_{1,3} = \pm\frac{\epsilon}{f_\lambda\sqrt{-\tilde{p}\mp f_\lambda}}\,(1+o(1)) = \pm\frac{\epsilon}{f\,g}\,(1+o(1))$$

folgt für $\epsilon > 0$: $\int_a^\infty u_{2,3}^*\,A\,u_{2,3}\,dx \le c_0 \int_a^\infty P\,(fg)^{-1}\exp\left(-c_1\int_a^x P\,(fg)^{-1}\,dt\right)dx < \infty$ und $\int_a^\infty u_{1,4}^*\,A\,u_{1,4}\,dx \approx \int_0^I \exp(c_2\,u)\,du$ mit Konstanten $c_i > 0$:

Lemma 5.13 (5.2.2) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann ist der Defektindex entweder minimal* ($P\,(fg)^{-1} \notin L_1(a,\infty)$) *oder aber maximal* ($P\,(fg)^{-1} \in L_1(a,\infty)$).

Bemerkung 5.14 *Mit* (3.35) *und* (5.21) *folgt im minimalen Defektfall:* $M_\alpha(z) =$

$$(rw)^{1/2}(c)\begin{pmatrix} P\nu_1\nu_3(\nu_1(1+s_1)-\nu_3(1+s_2)) & \nu_1\,\nu_3\,(1+s_3) \\ \nu_1\,\nu_3\,(1+s_4) & -P^{-1}\,(\nu_1(1+s_5)-\nu_3(1+s_6)) \end{pmatrix}(c,z)$$

$$= (rw)^{1/2}(c)\begin{pmatrix} P\,g^3\,r_1 & -g^2/2\,(1+r_2) \\ -g^2/2\,(1+r_3) & P^{-1}\,g\,r_4 \end{pmatrix}(c,z)\,,$$

wobei die Reste r_i, s_i *die bekannten Eigenschaften besitzen.*

Spektrum ($P\,(fg)^{-1} \notin L_1(a,\infty)$):

Für $\epsilon = 0$ gilt Re $\nu_i(x,\lambda) \equiv 0$, und mit (3.34) folgt, daß es im minimalen Defektfall keine quadratintegrierbare Lösung gibt. Die (unbewiesene) Vermutung liegt also nahe, daß die s.a. Realisierungen absolut stetiges Spektrum der spektralen VFH 2 besitzen (die Determinante $|\lim_{\epsilon\to 0+}$ Im $M_\alpha(\lambda + i\,\epsilon)| = (rwg^4 s)(c,\lambda)$, s klein, hilft uns nicht weiter). Da jedoch die s.a. Realisierungen in $(-\infty,\infty)$ kein Punktspektrum besitzen, und $\lim_{\epsilon\to 0+} M_\alpha(c,\lambda + i\,\epsilon)\ \forall\lambda \in (-\infty,\infty)$ existiert, können wir nach [65, $Kap.$8] und [58, Satz I.6] schließen:

Satz 5.15 (5.2.2) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt im minimalen Defektfall für selbstadjungierte Realisierungen H:*

$$\sigma_{pp}(H) = \emptyset, \quad \sigma(H) = \sigma_c(H) = (-\infty,\infty), \quad \sigma_{ac}(H) = (-\infty,\infty).$$

Kapitel 6

$\widetilde{q} \to -\infty\,, \quad \widetilde{p}^2 = O(\widetilde{q})$

Es ist bekannt [22], daß Untersuchungen der 70-iger bis 80-iger Jahre des letzten Jahrhunderts über das sogenannte Defektindexproblem die Entwicklung asymptotischer Formeln für gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung (> 2) entscheidend beeinflußt haben. In diesem Zusammenhang seien die Arbeiten von Walker [61, 62, 63], Devinatz [17] und Grudniewicz [28, 23] erwähnt, in denen die Defektzahlen von Operatoren vierter Ordnung – mit Koeffizientenfunktionen der Form $const. \times x^\alpha$ und $w \equiv 1$ – bestimmt wurden (vgl. auch [55]). Bereits diese Arbeiten haben gezeigt, daß es nicht leicht ist, allgemeine Bedingungen für den intermediären Defektfall $(3,3)$ anzugeben.
Die vorangegangenen Fälle führten auf minimalen bzw. maximalen Defektindex. Wenngleich die Fälle (5.2.1), (5.2.2) zeigen, daß die Bedingung $\widetilde{p}^{\,2} - 4\widetilde{q} \to \infty$ nicht hinreichend ist für den intermediären Defektfall, so folgt doch mit (3.34) – die Funktionen μ_k sind in beiden Fällen von gleicher Größenordnung –, daß unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathrm{Re}\,\nu_1 = o(\mathrm{Re}\,\nu_3)$ (oder umgekehrt) Kriterien für den Defektfall $(3,3)$ angegeben werden können. Eine weitere Situation, in der der Defektfall $(3,3)$ möglicherweise eintreten kann, liegt vor, wenn die Eigenwerte μ_k von unterschiedlicher Größenordnung sind (siehe Kapitel 7). In diesem Kapitel zeigen wir:

- In Abhängigkeit von gewissen Integralbedingungen können alle drei möglichen Defektfälle realisiert werden (Lemma 6.1).

- Im minimalen Defektfall besitzen die s.a. Realisierungen rein absolut stetiges Spektrum ($= (-\infty, \infty)$) der spektralen Vielfachheit 1.

- In den Defektfällen $(3,3)$ bzw. $(4,4)$ ist das Spektrum rein diskret.

Es gelte also

$$\tilde{q}(x) \to -\infty\,, \qquad \tilde{p}^2 = O(-\tilde{q}) \qquad (x \to \infty)\,. \tag{6.1}$$

Wir setzen $L_0 := K \times [0, \delta)$ mit einer beliebig, aber fest gewählten kompakten Teilmenge $K \subset (-\infty, \infty)$ und $f^2 := \tilde{p}^2 - 4\tilde{q}$.
Nach Voraussetzung gilt dann $f^2 \approx -\tilde{q}$ und $|\tilde{p}|\, f^{-1} \in [0, 1-c]$ (Konstante $c > 0$, x hinreichend groß), also $\tilde{p} \pm f \approx \pm f$. Mit $g_\pm^2 := 1 \pm \tilde{p}\, f^{-1}$ $(0 < c_1 \le g_\pm^2 \le c_2)$ erhalten wir auf $[a, \infty) \times L_0$ folgende Entwicklung und Asymptotik der Eigenwerte:
$\tilde{\Delta} = f\,(1 + o(1))\,,$

$$\sqrt{2}\,\nu_{1,3} = \sqrt{\tilde{p} \pm f} \pm \frac{z}{f\,\sqrt{\tilde{p} \pm f}} + O\left(\frac{z^2}{f^{7/2}}\right) = \sqrt{\tilde{p} \pm f}\,(1 + o(1))\ : \tag{6.2}$$

$$\sqrt{2}\,\nu_1 = f^{1/2}\, g_+\,(1 + o(1))\,, \qquad \sqrt{2}\,\nu_3 = i\, f^{1/2}\, g_-\,(1 + o(1))\,.$$

$\boxed{\nu_i^2\,, \tilde{\Delta}\,, f \approx (-\tilde{q})^{\,1/2}\,, \quad \mu_i \approx (-q_s/r)^{1/4}}$

Die Eigenwerte sind also von gleicher Größenordnung, die **Bedingungen der asymptotischen Integration** gegeben durch (5.2) - (5.7) und die Lösungen durch (3.30).
Aus (6.2) folgt mit

$$P = (w/r)^{1/4}, \quad P_q^- = (-q_s/r)^{1/4}\,:$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ \nu_1 = f^{1/2}\, g_+\,(1 + o(1)) \quad \boxed{\approx P^{-1}\, P_q^-} \tag{6.3}$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ \nu_3 = -\frac{\epsilon}{f^{3/2}\, g_-}\,(1 + o(1)) \quad \boxed{\approx \epsilon\, P^{-1}\, P_q^-\, \tilde{q}^{\,-1}} \tag{6.4}$$

Es gilt also $\mathrm{Re}\ \nu_3 = o(\mathrm{Re}\ \nu_1)$. Dieses führt zusammen mit $P\,|\tilde{\Delta}|^{-1}\,|\nu_i|^{-1} \approx P_q^-(-\tilde{q})^{-1}$ $(1 \le i \le 4)$ dazu, daß wir Bedingungen angeben können, unter denen der Defektfall $(3,3)$ eintritt:
Sei $z \in L_0$ beliebig, aber fest gewählt mit $\epsilon > 0$. Dann folgt mit (6.3), (6.4) und (3.34) ($c_i > 0$ Konstante):

$$\int_a^\infty u_{1,2}^*\, A\, u_{1,2}\, dx \approx \int_a^\infty \frac{P_q^-}{-\tilde{q}}\, \exp\left(\pm c_1 \int_a^x P_q^-\, dt\right)\, dx\,, \tag{6.5}$$

$$\int_a^\infty u_{3,4}^* \, A \, u_{3,4} \, dx \approx \int_a^\infty \frac{P_q^-}{-\widetilde{q}} \exp\left(\mp c_2 \int_a^x \frac{P_q^-}{-\widetilde{q}} \, dt \right) \, dx \, .$$

$u_2(.,z)$ und $u_3(.,z)$ sind zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen, und nach (6.1) folgt mit

$$I := \int_a^\infty (|q_s|^{-3/4} r^{-1/4} w)(t) \, dt \, ,$$

$$J := \int_a^\infty (|q_s|^{-3/4} r^{-1/4} w)(x) \exp\left(c_1 \int_a^x (|q_s|/r)^{1/4}(t) \, dt \right) \, dx$$

(es ist also $I \leq J$):

Lemma 6.1 (6.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt: Im Fall* $I = \infty$ *ist der Defektindex minimal, im Fall* $(I < \infty \wedge J = \infty)$ *gleich* $(3,3)$ *und im Fall* $J < \infty$ *schließlich maximal. Im minimalen Defektfall ist die* M*-Matrix gegeben durch* (3.36).

Eine zu Bemerkung 4.1 analoge Argumentation führt auf

Bemerkung 6.2 (6.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt* $(|q_s|/r)^{1/4} \notin L_1[a,\infty)$.

Als einfaches Beispiel für den intermediären (bzw. maximalen) Defektfall sei erwähnt: $p \equiv 0$, $r \equiv 1$, $q \equiv -1$ und $w(x) = w_1(x) = \exp(-c\,x)$ mit einer Konstanten $0 < c \leq 2$ (bzw. $c > 2$) (benutze (3.7) und (3.34)).

Spektrum: Für $\epsilon = 0$ gilt $\mathrm{Re}\, \nu_1 \approx P^{-1} P_q^-$ und $\mathrm{Re}\, \nu_3 \equiv 0$. Es folgt $\int_a^\infty u_{3,4}^* \, A \, u_{3,4} \, dx \approx I$, während die Asymptotik von $\int_a^\infty u_{1,2}^* \, A \, u_{1,2} \, dx$ gegeben ist durch (6.5):

Lemma 6.3 *Seien* $\epsilon = 0$ *und* $\lambda \in K$ *beliebig. Dann ist im minimalen Defektfall* $u_2(.,\lambda)$ *quadratintegrierbar* $(u_{1,3,4} \notin L_A^2[a,\infty))$, *im Defektfall* $(3,3)$ *sind* $u_{2,3,4}(.,\lambda)$ *drei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen* $(u_1 \notin L_A^2[a,\infty))$, *und im maximalen Defektfall gilt* $u_i(.,\lambda) \in L_A^2[a,\infty) \, (1 \leq i \leq 4)$.

Satz 6.4 (6.1) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt für selbstadjungierte Realisierungen H im minimalen Defektfall:*

$$\sigma_{sc}(H) = \emptyset\,, \quad \sigma_{ac}(H) = (-\infty, \infty) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1,$$

und mögliche Eigenwerte besitzen in $(-\infty, \infty)$ keinen Häufungswert.
In den Defektfällen $(3,3)$ bzw. $(4,4)$ besitzen die s.a. Realisierungen rein diskretes Spektrum.

Beweis:
Minimaler Defektfall: Nach Lemma 6.1 ist die M-Matrix gegeben durch (3.36), so daß der Rang von $\lim_{\epsilon\to 0^+} Im\ M_\alpha(\lambda + i\epsilon)$ größer gleich 1 ist (Im $M_{11}^{\alpha}(\lambda) = \{(rw)^{1/2}P|\nu_1|^2|\nu_3|(1+r)\}(c,\lambda) \neq 0$). Hieraus folgt einerseits mit Satz 2.15 die Aussage über das singulär stetige Spektrum und andererseits mit Satz 2.8 und *Referenz* die Behauptung über das absolut stetige Spektrum (nach Lemma 6.3 und Satz 2.8 ist die Vielfachheit von $\sigma_{ac}(H_a)$ kleiner gleich 1). Eine Argumentation analog zu der im Beweis von Satz 4.8 zeigt, daß sich die Eigenwerte nicht häufen ($u_2(x,z)$ ist für festes x analytisch in z).
Defektfall $(3,3)$*:*
Nach Lemma 6.3 sind $u_{2,3,4}$ drei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen: $u_2\,, u_3\,, u_4 \in N(T-\lambda)\ \forall\lambda \in (-\infty,\infty)$, also folgt mit Satz 2.14: $\sigma_c(H) = \emptyset$ (aus dim $N(T-\lambda) = 3$ folgt dim $N(\widetilde{T}-\lambda) \geq 2$, da T nach Lemma 2.3 eine eindimensionale Erweiterung von $\widetilde{T}$ ist). Eine zum Beweis von Satz 4.3 analoge Argumentation zeigt nun, daß die Eigenwerte in $(-\infty,\infty)$ keine Häufungspunkte besitzen. □

Kapitel 7

$\widetilde{p} \to \pm\infty\,, \quad \widetilde{q} = o(\widetilde{p}^{\,2})$

Dieser Fall wurde unter restriktiveren Bedingungen bereits in [53, Sätze 5.3, 5.4, 5.5] untersucht. Diese Sätze sind Spezialfälle der in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse. Je nach Vorzeichen von $\widetilde{p}$ gilt $\mu_3 = o(\mu_1)$ (bzw. $\mu_1 = o(\mu_3)$): Die Matrixelemente der Transformationsmatrix T_1 aus (3.10) sind zeilenweise von unterschiedlicher Größenordnung, die erste und dritte Komponente der Lösungen u_1, u_2 (bzw. u_3, u_4), sowie die zweite und vierte Komponente von u_3, u_4 (bzw. u_1, u_2) können aufgrund der Rücktransformation ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht sinnvoll abgeschätzt werden. Es zeigt sich, daß die Matrix T_0 aus (3.8) für unser Vorhaben bessere Dienste leistet.

Wir unterscheiden (formal) die Fälle $\widetilde{q} \to \pm\infty$ mit $\lambda \in K_3 \subset (-\infty, \infty)$ sowie den Fall $|\widetilde{q}|$ beschränkt,

Fall 1: $\lambda \in K_1 \subset (-\infty, \lambda_1]$ mit $\lambda_1 < c_1 := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}\,,$

Fall 2: $\lambda \in K_2 \subset [\lambda_2, \infty)$ mit $\lambda_2 > c_2 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}\,,$

mit beliebig, aber fest gewählten kompakten Teilmengen K_i. Nach Voraussetzung existiert also in allen Fällen ein hinreichend großes a derart, daß die Eigenwerte $\mu_k(x,z)$ auf $[a,\infty) \times L_0$ $(L_0 = K_i \times [0,\delta))$ paarweise verschieden sind.

Transformation auf Levinson-Form

Wir setzen zunächst p_i, p_c, q_i, q_c, p_2, q_2, r_2, $w_2 \equiv 0$; es ist also $\widetilde{p} = p\,(r\,w)^{-1/2}$ und $\widetilde{q} = q\,w^{-1}$.

Nach (3.6) gilt dann $u_1' = C_s\,u_1$, und die Transformation $u_1 = T_0\,u_2$ mit T_0 aus (3.8) führt auf

$$u_2' = [\Lambda + R_0]\,u_2 \tag{7.1}$$

mit $\Lambda = dg(\mu_1\,,\,-\mu_1\,,\,\mu_3\,,\,-\mu_3)\,,\quad R_0 = -T_0^{-1}\,T_0'$, wobei sich dieser Ausdruck mit gutem Willen berechnen läßt zu

$$T_0^{-1}\,T_0' = \begin{pmatrix} \theta & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \theta & \gamma & \beta \\ \zeta & \eta & \vartheta & \delta \\ \eta & \zeta & \delta & \vartheta \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

mit

$$\theta := \frac{\mu_1'}{2\,\mu_1} + \frac{\Delta'}{2\,\Delta}\,, \qquad \vartheta := \frac{\mu_3'}{2\,\mu_3} + \frac{\Delta'}{2\,\Delta}\,,$$

$$\alpha := -\frac{\mu_1'}{2\,\mu_1} + \frac{p_s'}{2\,\Delta}\,, \qquad \delta := -\frac{\mu_3'}{2\,\mu_3} - \frac{p_s'}{2\,\Delta}\,,$$

$$\beta := \frac{1}{4\,\Delta}\left[-\frac{\mu_3}{\mu_1}(p_s' + \Delta') + (p_s' - \Delta')\right], \qquad \gamma := \frac{1}{4\,\Delta}\left[\frac{\mu_3}{\mu_1}(p_s' + \Delta') + (p_s' - \Delta')\right],$$

$$\eta := \frac{1}{4\,\Delta}\left[-\frac{\mu_1}{\mu_3}(p_s' - \Delta') - (p_s' + \Delta')\right], \quad \zeta := \frac{1}{4\,\Delta}\left[\frac{\mu_1}{\mu_3}(p_s' - \Delta') - (p_s' + \Delta')\right].$$

Für eine weitere Transformation definieren wir $Q(x,z)$ durch

$$Q_{i,j} := \frac{(R_0)_{ij}}{\mu_j - \mu_i} \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \text{und} \quad Q_{i,i} \equiv 0\,. \tag{7.3}$$

Diesmal gilt $Q\,\Lambda - \Lambda\,Q = R_0 - \text{diag}\ R_0$, und mit der Transformation $u_2 = [1 + Q(x,z)]\,u_3$ ist (3.3) äquivalent zu

$$u_3' = [\Lambda + \text{diag}\ R_0 + (1+Q)^{-1}\{R_0\,Q - Q\,\text{diag}\ R_0 - Q'\}]u_3. \tag{7.4}$$

Damit nun Satz 3.1 auf (7.4) anwendbar ist und die Transformationen gültig sind, ist noch zu zeigen, daß $\Lambda(x,z) + \text{diag}\ R_0(x,z)$ die Dichotomiebedingung auf $[a,\infty) \times L_0$ erfüllen, sowie daß gleichmäßig in z gilt:

$$R_0\,Q,\ Q\,\text{diag}\ R_0\,,\ Q' \in L_1[a,\infty)\,, \quad Q(x,z) \to 0 \quad (x \to \infty)\,. \tag{7.5}$$

Wir beginnen mit dem Fall

7.1 $\widetilde{p} \to +\infty$

Es gelte also

$$\widetilde{p}(x) \to +\infty\,, \quad \widetilde{q} = o(\widetilde{p}^{\,2}) \qquad (x \to \infty) \tag{7.6}$$

Wir setzen $q_0 = \widetilde{q} - z$ und erhalten auf $[a, \infty) \times L_0$ folgende Entwicklung und Asymptotik der Eigenwerte: $\boxed{\nu_1^2\,, \widetilde{\Delta} \approx \widetilde{p}\,, \quad \nu_3^2 \approx |q_0|\,\widetilde{p}^{\,-1}\,, \quad \mu_3 = o(\mu_1)}$

$$\widetilde{\Delta} = \widetilde{p}\left[1 - \frac{2\,q_0}{\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = \widetilde{p}\,(1 + o(1))\,,$$

$$\nu_1 = \widetilde{p}^{\,1/2}\left[1 - \frac{q_0}{2\,\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = \widetilde{p}^{\,1/2}\,(1 + o(1))\,,$$

$$\nu_3 = \sqrt{\frac{q_0}{\widetilde{p}}}\left[1 + \frac{q_0}{2\,\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = \sqrt{\frac{q_0}{\widetilde{p}}}(1 + o(1))\,. \tag{7.7}$$

Es bleibt Bedingung (7.5) zu verifizieren, sowie zu zeigen, daß $\Lambda(x, z) + \text{diag } R_0(x, z)$ die Dichotomiebedingung erfüllt.

Aufgrund der durchzuführenden Rücktransformation haben wir p_c, $q_c \equiv 0$ gesetzt. Die integrierbaren bzw. abspaltbaren Ausdrücke p_i, q_i bzw. p_2, q_2, r_2, w_2 jedoch können mit den üblichen Methoden (siehe Seite 29 ff.) zu Levinson-Termen transformiert werden. Entscheidend für (7.5) ist der Ausdruck μ_i'/μ_i. Eine unangenehme, aber wie immer direkte Rechnung zeigt, daß die **Bedingungen der Asymptotischen Integration** im Fall $|\widetilde{q}(x)| \to \infty$ gegeben sind durch ($p = p_s$, $q = q_s$, $r = r_s$, $w = w_s$)

$$\frac{p_i}{(r\,p)^{1/2}}\,, \ \frac{q_i}{(p\,q)^{1/2}} \ \in L_1 \tag{7.8}$$

$$\frac{p_2'}{(r\,q)^{1/2}}\,, \ \frac{q_2'}{q}\,, \ \frac{r_2'}{r}\,, \ \frac{w_2'}{q} \ \in L_1 \tag{7.9}$$

$$\left|\frac{p}{q}\right|^{1/2}\left[\frac{p_1'}{p}\,, \ \frac{q_1'}{q}\,, \ \frac{r_1'}{r}\,, \ \frac{w_1'}{q}\right] \to 0 \tag{7.10}$$

$$\left|\frac{p}{q}\right|^{1/4}\left[\frac{p_1'}{p}\,, \ \frac{q_1'}{q}\,, \ \frac{r_1'}{r}\,, \ \frac{w_1'}{q}\right] \in L_2 \tag{7.11}$$

$$\left|\frac{p}{q}\right|^{1/2}\left[\frac{p_1''}{p}\,, \ \frac{q_1''}{q}\,, \ \frac{r_1''}{r}\,, \ \frac{w_1''}{q}\right] \in L_1 \tag{7.12}$$

Hierbei entspricht (7.10) der Bedingung $Q(x, z) \to 0$ und (7.11), (7.12) der Bedingung $||R_0(x, z)\,Q(x, z)||$, $||Q(x, z)\,\text{diag } R_0(x, z)||$, $||Q'(x, z)|| \ \leq \rho(x)$ mit $\rho \in L_1$.

Bemerkung 7.1 *Im Fall* $|\tilde{q}|$ *beschränkt sind die Bedingungen gegeben durch* (7.8) – (7.12), *indem man* q *im Nenner durch* w *ersetzt.*

Lemma 7.2 $\Lambda(x,z) +$ *diag* $R_0(x,z)$ *erfüllt auf* $[a,\infty)\times L_0$ *die Dichotomiebedingung.*

Beweis: Nach (7.10) gilt gleichmäßig in z, d.h. auf L_0: $\mu_i^{-1}(x,z)\,[\theta(x,z),\,\vartheta(x,z)] \to 0$ für $x\to\infty$, und die Entwicklung der Eigenwerte zeigt Im $\nu_1 = o(\text{Re }\nu_1)$. Da nach Lemma 3.3 Re $\nu_i(x,z)$ auf $[a,\infty)\times L_0$ konstantes Vorzeichen besitzen, folgt mit $\mu_3 = o(\mu_1)$ unmittelbar die Behauptung. $\square$

Somit besitzt (7.4) die Lösungen

$$Z^{(k)}(x,z) = (e_k + l_k(x,z))\exp\left(\int_a^x [\mu_k(t,z) + (R_0)_{kk}(t,z)]\,dt\right)$$

mit den bekannten Eigenschaften. Nach der Rücktransformation

$$u_k(x,z) = T_0(x,z)\,[1+Q(x,z)]\,Z^{(k)}(x,z)$$

besitzt (3.3) Lösungen der asymptotischen Form ($x\to\infty$):

$$u_1(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1+r_{11}(x,z) \\ \mu_1(x,z)[1+r_{12}(x,z)] \\ (r\mu_3\mu_1^2)(x,z)\,r_{13}(x,z) \\ (r\mu_1^2)(x,z)[1+r_{14}(x,z)] \end{pmatrix}\exp\{\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_2(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1+r_{21}(x,z) \\ -\mu_1(x,z)[1+r_{22}(x,z)] \\ (r\mu_3\mu_1^2)(x,z)\,r_{23}(x,z) \\ (r\mu_1^2)(x,z)[1+r_{24}(x,z)] \end{pmatrix}\exp\{-\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_3(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z)\begin{pmatrix} 1+r_{31}(x,z) \\ \mu_1(x,z)\,r_{32}(x,z) \\ (r\,\mu_3\,\mu_1^2)(x,z)[1+r_{33}(x,z)] \\ (r\mu_1^2)(x,z)\,r_{34}(x,z) \end{pmatrix}\exp\{\int_a^x \mu_3(t,z)\,dt\}$$

$$u_4(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{41}(x,z) \\ \mu_1(x,z)\, r_{42}(x,z) \\ -(r\,\mu_3\,\mu_1^2)(x,z)[1 + r_{43}(x,z)] \\ (r\mu_1^2)(x,z)\, r_{44}(x,z) \end{pmatrix} \exp\{-\int_a^x \mu_3(t,z)\, dt\}, \tag{7.13}$$

wobei Gleichheit in dem Sinne zu verstehen ist, daß die rechte Seite noch mit von a, z abhängigen Konstanten zu multiplizieren ist. Die Reste $r_{ki}(x,z)$ sind wiederum stetig in (x,z) (jeweils für festes x bzw. festes z), und $a = a(\gamma)$ kann so groß gewählt werden, daß $r_{ki}(x,z)$ auf $[a,\infty) \times L_0$ in einer kleinen Umgebung $U_\gamma(0)$ liegt:

$$\int_a^\infty u_i^*(x,z)\, A(x)\, u_i(x,z)\, dx \approx \int_a^\infty \frac{P(x)}{|\widetilde{\Delta}(x,z)|\, |\nu_i(x,z)|}\, e^{2\int_a^x P(t)\, Re\, \nu_i(t,z)\, dt}\, dx\,. \tag{7.14}$$

Nach (7.7) gilt

$$\mathrm{Re}\, \nu_1(x,z) = \widetilde{p}^{\,1/2}(x)\, (1 + o(1))\,, \tag{7.15}$$

also $\mu_1 \approx P\, \widetilde{p}^{\,1/2} \approx \mathrm{Re}\, \mu_1$, und somit $\mathrm{Re}\, \mu_3 = o(\mathrm{Re}\, \mu_1)$.

Quadratintegrierbare Lösungen:

Mit (7.7), (7.14) und (7.15) folgt für $\epsilon \geq 0$: $u_2(.,z)$ ist quadratintegrierbar und $u_1(.,z)$ genau dann, wenn $J < \infty$ gilt mit

$$J := \int_a^\infty (w r^{1/2} p_s^{-3/2})(x)\, e^{c\int_a^x (p_s/r)^{1/2}(t)\, dt}\, dx \tag{7.16}$$

(Konstante $c > 0$; $(p_s/r)^{1/2} = (w/p_s)^{1/2}\widetilde{p}$).

Um Aussagen über $u_3(.,z)$, $u_4(.,z)$ treffen zu können, beginnen wir mit dem Fall:

$\tilde{q}$ beschränkt

Fall 1: $\lambda \in K_1 \subset (-\infty, \lambda_1]$ mit $\lambda_1 < c_1 := \liminf_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}$

Fall 2: $\lambda \in K_2 \subset [\lambda_2, \infty)$ mit $\lambda_2 > c_2 := \limsup_{x\to\infty}\{\widetilde{q}(x)\}$

In beiden Fällen gilt für fest gewähltes $\epsilon > 0$ (benutze (7.7)):

$$\frac{-c_1}{\widetilde{p}^{\,1/2}(x)} \leq \mathrm{Re}\, \nu_3(x,z) \leq \frac{-c_2}{\widetilde{p}^{\,1/2}(x)} < 0 \tag{7.17}$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Mit (7.14) und (7.7) folgt $\int_a^\infty u_{3,4}^*(x,z)\, A(x)\, u_{3,4}(x,z)\, dx \approx \int_0^I \exp(\mp c\, u)\, du$ mit

$$I := \int_a^\infty (w/p_s)^{1/2}(x)\, dx. \tag{7.18}$$

Für $\epsilon > 0$ ist also $u_3(.,z)$ quadratintegrierbar, während eine Standardargumentation zeigt, daß $u_4(.,z)$ nicht quadratintegrierbar ist:
Die Annahme $(w/p_s)^{1/2} \in L_1[a,\infty)$ führt zusammen mit (7.6), (7.9), (7.10) und Bemerkung 7.1 auf p_s'/p_s, $w'/w \in L_1[a,\infty)$: p_s, w besitzen für $x \to \infty$ endliche, strikt positive Limiten. Die Annahme ist also falsch; vielmehr gilt

Bemerkung 7.3 (7.6) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt* $(w/p_s)^{1/2} \notin L_1[a,\infty)$ *und somit auch* $(p_s/r)^{1/2} \notin L_1[a,\infty)$.

Mit J aus (7.16) erhalten wir

Lemma 7.4 $\tilde{q}$ *sei beschränkt,* (7.6) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt (vgl. Bemerkung* 7.1*). Dann ist der Defektindex im Fall* $J = \infty$ *minimal (hinreichend:* $wp_s^{-3/2}r^{1/2} \notin L_1[a,\infty)$ *) und im Fall* $J < \infty$ *gleich* $(3,3)$.

Zur detaillierteren Analyse der spektralen Eigenschaften sind die eingangs erwähnten Fälle zu unterscheiden: Im **Fall 1** gilt (7.17) auch für $\epsilon = 0$; es folgt

Satz 7.5 $\tilde{q}$ *sei beschränkt,* $c_1 := \liminf_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x)\}$, (7.6) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt (vgl. Bemerkung* (7.1)*). Dann besitzen die selbstadjungierten Realisierungen* H *in* $(-\infty, c_1)$ *diskretes Spektrum mit dem einzig möglichen Häufungswert in* c_1 :

$$\sigma_{ess}(H) \subset [c_1, \infty)\,.$$

Die Operatoren sind halbbeschränkt nach unten.

Beweis:
Im Defektfall $(2,2)$ sind $u_2(.,z)$ und $u_3(.,z)$ auch für $\epsilon = 0$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen, während im Defektfall $(3,3)$ zusätzlich noch $u_1(.,\lambda)$ quadratintegrierbar ist. Nach Satz 2.8 bzw. Satz 2.14 folgt $\sigma_c(H) \cap (-\infty, c_1) = \emptyset$, und eine zum Beweis von Satz 4.3 analoge Argumentation zeigt, daß die Eigenwerte in $(-\infty, c_1)$ keine Häufungspunkte besitzen. □

Das wußten wir natürlich bereits.

Um im **Fall 2** auf spektrale Aussagen schließen zu können, müssen wir uns etwas mehr Mühe geben: Für einige Komponenten der Lösungen sind nur Abschätzungen der Form $f(x,z)\,s(x,z)$, s klein, bekannt, wodurch nicht mehr alle Matrixelemente der M-Matrix sinnvoll berechnet werden können.

Vorbereitend bemerken wir, daß $u_{1,2}(x,\lambda)$ für festes x analytische Fortsetzungen in $L_0^- := K \times (-\delta,\delta)$ besitzen: Hierzu setze die Funktionen $\mu_k(x,z)$ stetig in L_0^- fort, es ist also $(\epsilon \in [0,\delta))$ Re $\widetilde{\Delta}(x,\lambda,-\epsilon)$ = Re $\widetilde{\Delta}(x,\lambda,\epsilon)$, Im $\widetilde{\Delta}(x,\lambda,-\epsilon) = -$ Im $\widetilde{\Delta}(x,\lambda,\epsilon)$ und Re $\nu_{1,3}(x,\lambda,-\epsilon) = \pm$ Re $\nu_{1,3}(x,\lambda,\epsilon)$, Im $\nu_{1,3}(x,\lambda,-\epsilon) = \mp$ Im $\nu_{1,3}(x,\lambda,\epsilon)$. Wiederholung der im Beweis zu Lemma 7.2 vorgetragenen Argumente zeigt nun, daß $m_{1,2} := \pm\mu_1 - \theta$ die Dichotomiebedingung auch auf $[a,\infty) \times L_0^-$ erfüllen ($m_{3,4} := \pm\mu_3 - \vartheta$ natürlich nicht). Desweiteren ist offensichtlich, daß (7.5) unter den Bedingungen der Asymptotischen Integration auch für $z \in L_0^-$ erfüllt ist, so daß die Behauptung nun aus dem Zusatz zum Satz von Levinson folgt.

Für $\epsilon = 0$ gilt Re $\nu_3(x,\lambda) \equiv 0$, also $\int_a^\infty\, u_{3,4}^*(x,z)\,A(x)\,u_{3,4}(x,z)\,dx \approx I$: $u_3(.,\lambda)$, $u_4(.,\lambda)$ sind nicht quadratintegrierbar.

Satz 7.6 *$\tilde{q}$ sei beschränkt, $c_2 := \limsup_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x)\}$, (7.6) und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt. Für s.a. Realisierungen H gilt im minimalen Defektfall $(J = \infty)$:*

$$\sigma_{sc}(H) \cap (c_2,\infty) = \emptyset\,, \quad [c_2,\infty) \subset \sigma_{ac}(H) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1,$$

und die Eigenwerte besitzen in (c_2,∞) keine Häufungspunkte.

Im Fall $J < \infty$ ist die spektrale Vielfachheit des stetigen Spektrums in (c_2,∞) höchstens gleich 1.

Beweis:

Minimaler Defekt: Im Defektfall $(2,2)$ ist für $\epsilon = 0$ nur $u_2(.,\lambda)$ quadratintegrierbar, also folgt mit Satz 2.8, daß die spektrale Vielfachheit des stetigen Spektrums höchstens 1 beträgt. Desweiteren folgt die Aussage über die nichtvorhandenen Häufungspunkte: Ein Eigenwert $\lambda_0 \in K_2$ genügt einer Gleichung der Form $(\alpha_1,\alpha_2)\,u_2(0,\lambda_0) = 0$. Da aber u_2 analytisch von z abhängt, folgt die Behauptung aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen.

Um nun die Aussage über das singulär stetige Spektrum, sowie über die Vielfachheit des absolut stetigen Spektrums zeigen zu können, benötigen wir hinreichende Informationen über die **M-Matrix:**
Für $\epsilon \neq 0$ sind $u_2(.,z)$, $u_3(.,z)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen; wir normieren $u_{2,3}$ durch Multiplikation mit $(\Delta^{1/2}\mu_{1,3}^{1/2})(c,z)\,\exp(\pm\int_a^c \mu_{1,3}(t,z)\,dt)$ und gehen vor wie auf Seite 39, stellen also in $c \in [a,\infty)$ (c hinreichend groß, somit liegen alle im folgenden auftretenden Reste $s(c,z)$ in einer kleinen Umgebung von 0, gleichmäßig in z) die Dirichletrandbedingung, setzen wiederum $W(.,z) := (u_2(.,z), u_3(.,z))$, schreiben $W = (W_1, W_2)^t$ und erhalten $M(z) = W_2(c,z)W_1^{-1}(c,z)$ (die Determinate von $W_1(c,z)$ ist gegeben durch $|W_1(c,z)| = \mu_1(c,z)\,(1+s(c,z)) \neq 0$ für hinreichend großes c und $\epsilon \geq 0$).
$M(z)$ ist also stetig in z, so daß zum Beweis der Aussage über das singulär stetige Spektrum nach Satz 2.15 nur noch zu zeigen ist, daß die dort angegebene Bedingung (2.23) nicht verletzt wird. Hierfür ist es offensichtlich hinreichend zu zeigen, daß $\operatorname{Im} M(\lambda)$ mindestens den Rang 1 besitzt, womit dann auch die Aussage über das absolut stetige Spektrum bewiesen ist:
Für $\epsilon = 0$ gilt $\operatorname{Im} \nu_1(x,\lambda) = \operatorname{Re} \nu_3(x,\lambda) = 0$, also folgt mit

$$M_{11}(c,z) = (r\mu_3\mu_1^2)(c,z)\,(1+s(c,z)) \;:$$

$\operatorname{Im} M_{11}(c,\lambda) = (r\,P^3\,\{\operatorname{Im}\nu_3\}\,\nu_1^2)\,(c,\lambda)\,(1+s(c,\lambda)) \neq 0\,$, also die Behauptung.

Im Fall $J < \infty$ liegt der Defektfall $(3,3)$ vor. Für $\epsilon = 0$ sind $u_{1,2}(.,\lambda)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen ($u_{3,4}(.,\lambda)$ sind nicht quadratintegrierbar). Der Nullraum $N(\widetilde{T} - \lambda)$ ist also mindestens eindimensional, womit die Behauptung aus Satz 2.14 folgt. $\square$

$|\tilde{q}|(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$

Der Übergang vom Fall $|\tilde{q}|$ beschränkt zu $\tilde{q} \to \pm\infty$ beinhaltet im wesentlichen eine Änderung der Bedingungen der Asymptotischen Integration sowie der Voraussetzungen für den Defektindex. Wir können uns also entsprechend kurz fassen:

Mit J aus (7.16) und

$$I := \int_a^\infty [wp_s^{-1/2}|q_s|^{-1/2}](x)\,dx \qquad \text{gilt}$$

Lemma 7.7 *Es gelte $\widetilde{q}(x) \to -\infty$, (7.6) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt: Im Fall $I, J = \infty$ ist der Defektindex minimal, im Fall $\{$entweder $(I < \infty \wedge J = \infty)$ oder aber $(J < \infty \wedge I = \infty)\}$ gleich $(3,3)$ und im Fall I, $J < \infty$ maximal.*

Beweis: Es gilt

$$\frac{-c_1\,\epsilon}{\widetilde{p}^{\,1/2}(x)\,(-\widetilde{q})^{1/2}(x)} \leq \operatorname{Re}\nu_3(x,z) \leq \frac{-c_2\,\epsilon}{\widetilde{p}^{\,1/2}(x)\,(-\widetilde{q})^{1/2}(x)} \leq 0$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Nun benutze (7.14) und (7.7). □

Auskunft über die spektralen Eigenschaften gibt

Satz 7.8 *Es gelte $\widetilde{q}(x) \to -\infty$, (7.6) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Für s.a. Realisierungen H gilt im Defektfall $(2,2)$ $(I, J = \infty)$:*

$$\sigma_{sc}(H) \cap (-\infty,\infty) = \emptyset\,, \quad \sigma_{ac}(H) = (-\infty,\infty) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1,$$

und die Eigenwerte besitzen in $(-\infty,\infty)$ keine Häufungspunkte.
Im Fall $I < \infty$ besitzen die s.a. Realisierungen H diskretes Spektrum:

$$\sigma_{ess}(H) = \emptyset\,.$$

Im Fall $I = \infty$, $J < \infty$ ist die spektrale Vielfachheit des stetigen Spektrums einer s.a. Realisierung höchstens gleich 1.

Beweis: Abgesehen von der Aussage im Fall $I < \infty$ identisch mit dem Beweis zu Satz 7.6. Bleibt also zu zeigen, daß H im Fall $I < \infty$ diskretes Spektrum besitzt: Im Fall $I < \infty$ und $J = \infty$ liegt der Defektfall $(3,3)$ vor und für $\epsilon = 0$ sind $u_2(.,\lambda)$, $u_3(.,\lambda)$, $u_4(.,\lambda)$ drei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen. Somit folgt mit Satz 2.14 $\sigma_c(H) \cap (-\infty,\infty) = \emptyset$, während eine zum Beweis von Satz 4.3 analoge Argumentation zeigt, daß die Eigenwerte in $(-\infty,\infty)$ keine Häufungspunkte besitzen (im Fall I, $J < \infty$ liegt maximaler Defektfall vor). □

Bekanntlich ist das Spektrum im Fall

$$\widetilde{q}(x) \to +\infty \qquad (x \to \infty)$$

diskret. Wenig überraschend läßt sich dieses Resultat auch im Rahmen von (7.6) (analog zu Satz 7.5) bestätigen: Für $\epsilon \geq 0$ gilt

$$-c_1 \left(\frac{\widetilde{q}(x)}{\widetilde{p}(x)} \right)^{1/2} \leq \mathrm{Re}\, \nu_3(x,z) \leq -c_2 \left(\frac{\widetilde{q}(x)}{\widetilde{p}(x)} \right)^{1/2} < 0$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Also folgt mit (7.14) und (7.7) für $\epsilon \geq 0$: $u_2(.,z)$ und $u_3(.,z)$ sind quadratintegrierbar und mit J aus (7.16) und

$$I := \int_a^\infty [w p_s^{-1/2} q_s^{-1/2}](x)\, e^{c \int_a^x (q_s/p_s)^{1/2}(t)\, dt}\, dx$$

(Konstante $c > 0$) folgt

Lemma 7.9 *Es gelte $\widetilde{q}(x) \to +\infty$, (7.6) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann gilt: Im Fall $I, J = \infty$ ist der Defektindex minimal, im Fall $\{$entweder $(I < \infty \wedge J = \infty)$ oder aber $(J < \infty \wedge I = \infty)\}$ gleich $(3,3)$ und im Fall I, $J < \infty$ maximal.*

Die übliche Argumentation zeigt nun, daß die s.a. Realisierungen in allen drei Defektfällen – wiederum unter den restriktiven Bedingungen der As. In. – rein diskretes Spektrum besitzen (die Eigenschaft quadratintegrierbar zu sein, hängt nicht von ϵ ab):

Satz 7.10 *Es gelte $\widetilde{q}(x) \to +\infty$, (7.6) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann besitzen die s.a. Realisierungen H diskretes Spektrum:*

$$\sigma_{ess}(H) = \emptyset\,.$$

7.2 $\tilde{p} \to -\infty$

Es gelte also

$$\widetilde{p}(x) \to -\infty\,, \quad \widetilde{q} = o(\widetilde{p}^{\,2}) \qquad (x \to \infty) \tag{7.19}$$

Wir setzen $q_0 = \widetilde{q} - z$ und erhalten auf $[a, \infty) \times L_0$ folgende Entwicklung und Asymptotik der Eigenwerte: $\boxed{\nu_3^2\,, \widetilde{\Delta} \approx |\widetilde{p}|\,, \quad \nu_1^2 \approx |q_0|\,|\widetilde{p}|^{\,-1}\,, \quad \mu_1 = o(\mu_3)}$

$$\widetilde{\Delta} = |\widetilde{p}| \left[1 - \frac{2\,q_0}{\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = |\widetilde{p}|\,(1 + o(1))\,,$$

$$\nu_3 = i\,|\widetilde{p}|^{1/2} \left[1 - \frac{q_0}{2\,\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = i\,|\widetilde{p}|^{1/2}\,(1 + o(1))\,,$$

$$\nu_1 = \left(\frac{-q_0}{|\widetilde{p}|}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{q_0}{2\,\widetilde{p}^{\,2}} + O(\frac{q_0^2}{\widetilde{p}^{\,4}})\right] = \left(\frac{-q_0}{|\widetilde{p}|}\right)^{1/2} (1 + o(1)) \tag{7.20}$$

Die **Bedingungen der asymptotischen Integration** sind im Fall $|\widetilde{q}|(x) \to \infty$ gegeben durch (7.8)–(7.12) und im Fall $|\widetilde{q}|$ beschränkt durch Bemerkung 7.1.

Dichotomiebedingung:

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt ist der Nachweis der Dichotomiebedingung abhängig vom zugrundeliegenden Fall. Vorbereitend bemerken wir, daß wegen (7.10) auch in diesem Fall gleichmäßig in z gilt: $\mu_i^{-1}(x,z)\,[\theta(x,z),\,\vartheta(x,z)] \to 0$ für $x \to \infty$.

Unter der Annahme, daß $\Lambda(x,z)+\mathrm{diag}\ R_0(x,z)$ die Dichotomiebedingung erfüllt, besitzt (3.3) Lösungen der asymptotischen Form ($x \to \infty$):

$$u_1(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{11}(x,z) \\ \mu_3(x,z)\,r_{12}(x,z) \\ (r\,\mu_1\,\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{13}(x,z)] \\ (r\mu_3^2)(x,z)\,r_{14}(x,z) \end{pmatrix} \exp\{\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_2(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_1^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{21}(x,z) \\ \mu_3(x,z)\,r_{22}(x,z) \\ -(r\,\mu_1\,\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{23}(x,z)] \\ (r\mu_3^2)(x,z)\,r_{24}(x,z) \end{pmatrix} \exp\{-\int_a^x \mu_1(t,z)\,dt\}$$

$$u_3(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{31}(x,z) \\ \mu_3(x,z)[1 + r_{32}(x,z)] \\ (r\mu_1\mu_3^2)(x,z)\, r_{33}(x,z) \\ (r\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{34}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{\int_a^x \mu_3(t,z)\, dt\}$$

$$u_4(x,z) = \left(\Delta^{-1/2}\mu_3^{-1/2}\right)(x,z) \begin{pmatrix} 1 + r_{41}(x,z) \\ -\mu_3(x,z)[1 + r_{42}(x,z)] \\ (r\mu_1\mu_3^2)(x,z)\, r_{43}(x,z) \\ (r\mu_3^2)(x,z)[1 + r_{44}(x,z)] \end{pmatrix} \exp\{-\int_a^x \mu_3(t,z)\, dt\} \tag{7.21}$$

Die rechte Seite ist wiederum mit von a, z abhängigen Konstanten zu multiplizieren. Die Reste $r_{ki}(x,z)$ besitzen die üblichen Eigenschaften, also gilt (7.14).

Quadratintegrierbare Lösungen:

Mit (7.20) folgt

$$\text{Re}\; \nu_3(x,z) = \frac{-\epsilon}{2\,|\widetilde{p}(x)|^{3/2}}\,(1 + o(1))\,. \tag{7.22}$$

Für festes $\epsilon > 0$ ist $u_3(.,z)$ quadratintegrierbar und $u_4(.,z)$ genau dann, wenn $I < \infty$ gilt mit

$$I := \int_a^\infty [|p_s|^{-3/2}\, r^{1/2}\, w](x)\, dx\,. \tag{7.23}$$

Für $\epsilon = 0$ sind $u_{3,4}(.,\lambda)$ quadratintegrierbar genau dann, wenn $I < \infty$ gilt.

Um Aussagen über $u_{1,2}(.,z)$ treffen zu können, beginnen wir mit dem Fall

$\tilde{q}$ beschränkt, $L_0 = K \times [0,\delta)$

mit einer beliebig, aber fest gewählten kompakten Teilmenge $K \subset [\lambda_2, \infty)$ mit $\lambda_2 > c_2 := \limsup_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x)\}$.

Für $\epsilon \geq 0$ gilt (benutze (7.20)):

$$0 < \frac{c_1}{|\widetilde{p}(x)|^{1/2}} \leq \text{Re}\; \nu_1(x,z) \leq \frac{c_2}{|\widetilde{p}(x)|^{1/2}}$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Vorbehaltlich der Dichotomiebedingung folgt mit den üblichen Methoden:

Für $\epsilon \geq 0$ ist $u_2(.,z)$ quadratintegrierbar, $u_1(.,z)$ jedoch nicht:

Bemerkung 7.11 *Aus* (7.19) *und den Bedingungen der As. In. folgt* $w^{1/2}|p_s|^{-1/2} \notin L_1[a,\infty)$.

Der Defektindex ist entweder gleich $(2,2)$ oder aber gleich $(3,3)$:

Lemma 7.12 $\tilde{q}$ *sei beschränkt,* (7.19) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt (vgl. Bemerkung* 7.1). *Dann gilt mit* I *aus* (7.23) : *Im Fall* $I = \infty$ *ist der Defektindex minimal, im Fall* $I < \infty$ *gleich* $(3,3)$.

Dichotomiebedingung:
Wir schreiben $\Lambda + \mathrm{diag}\ R_0 = \mathrm{diag}\ \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ mit $m_{1,2} = \pm\mu_1 - \theta$, $m_{3,4} = \pm\mu_3 - \vartheta$ und zeigen exemplarisch, daß m_1 die Dichotomiebedingung erfüllt (die verbleibenden Fälle werden analog behandelt): Es ist zu zeigen, daß $\mathrm{Re}\ \{m_{2,3,4} - m_1\}$ auf $[a,\infty) \times L_0$ jeweils konstantes Vorzeichen besitzen: Die Entwicklung der Eigenwerte zeigt $\mathrm{Im}\ \nu_1 = O(\mathrm{Re}\ \nu_1)$ und $\mathrm{Re}\ \nu_3 = o(\mathrm{Re}\ \nu_1)$ (jeweils gleichmäßig in z, d.h. auf L_0). Mit $\mu_i^{-1}\,[\theta,\, \vartheta] \to 0$ folgt $\mathrm{Re}\ \{m_3 - m_1\} = \mathrm{Re}\ \mu_3 - \mathrm{Re}\ \{\mu_1(1 + o(1))\} = -[\mathrm{Re}\ \mu_1]\,(1 + o(1))$ und entsprechend $\mathrm{Re}\ \{m_4 - m_1\} = -[\mathrm{Re}\ \mu_1]\,(1 + o(1))$. Lemma 3.3 zeigt nun die gewünschte Eigenschaft. □

Wiederum zeigt eine zum letzten Abschnitt analoge Argumentation, daß $u_{1,2}(.,\lambda)$ für festes x analytische Fortsetzungen in $L_0^- := K \times (-\delta,\delta)$ besitzen ($m_{1,2}$ erfüllen die Dichotomiebedingung auch auf $[a,\infty) \times L_0^-$). Somit gilt

Satz 7.13 $\tilde{q}$ *sei beschränkt,* $c_2 := \limsup_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x)\}$, (7.19) *und die Bedingungen der asymptotischen Integration erfüllt. Für s.a. Realisierungen* H *gilt im Fall* $I = \infty$:

$$\sigma_{sc}(H) \cap (c_2,\infty) = \emptyset\,, \quad [c_2,\infty) \subset \sigma_{ac}(H) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1, \text{ und}$$

die Eigenwerte besitzen in (c_2,∞) *keine Häufungspunkte.*
Im Fall $I < \infty$ *besitzen die s.a. Realisierungen* H *diskretes Spektrum:*

$$\sigma_{ess}(H) \cap (c_2,\infty) = \emptyset\,.$$

Beweis:

Argumentiere wie im Beweis zu Satz 7.6: Diesmal gilt $|W_1(c,z)| = \mu_3(c,z)\,(1 + s_1(c,z)) \neq 0$ für hinreichend großes c und $\epsilon \geq 0$ und

$$M_{22}(c,z) = (r\mu_3)(c,z)\,(1 + s_2(c,z))$$

mit $s_i(c,z)$ in einer kleinen Umgebung von 0 (gleichmäßig in z); also folgt die Behauptung im minimalen Defektfall aus Re $\nu_3(x,\lambda) = 0$ ($\epsilon = 0$).

Im Fall $I < \infty$ sind $u_{2,3,4}(.,\lambda)$ drei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen, also folgt die Behauptung mit Hilfe von Satz 2.14. □

Bemerkung 7.14 *Im Fall $\tilde{q}$ beschränkt mit $L_0 = K \times [0,\delta)$, $K \subset (-\infty, \lambda_1]$ eine beliebig, aber fest gewählte kompakte Teilmenge und $\lambda_1 < c_1 := \liminf_{x\to\infty}\{\tilde{q}(x)\}$, gilt*

$$0 \leq \frac{c_1\,\epsilon}{|\tilde{p}(x)|^{1/2}} \leq Re\,\nu_1(x,z) \leq \frac{c_2\,\epsilon}{|\tilde{p}(x)|^{1/2}}$$

mit Konstanten $c_i > 0$. Die Dichotomiebedingung ist nicht mehr gleichmäßig in z erfüllt. Für festes, reelles $z \in K$ jedoch hängt die Dichotomiebedingung nur noch von den Ausdrücken θ, ϑ ab ($Re\,\mu_1(x,\lambda) = Re\,\mu_3(x,\lambda) \equiv 0$).

Eine direkte Rechnung bestätigt nun, daß die Dichotomiebedingung unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\frac{\tilde{p}^{\,2}(t)}{\tilde{p}^{\,2}(x)} \leq c, \quad a \leq t \leq x$$

($c > 0$ eine Konstante) für festes $z = \lambda \in K$ erfüllt ist [22, S. 9 f.], *so daß mit $\int_a^\infty u_{1,2}^*(x,\lambda)\,A(x)\,u_{1,2}(x,\lambda)\,dx \approx \int_a^\infty \frac{w^{1/2}}{|p_s|^{1/2}}(x)\,dx$ ($\epsilon = 0$) und Bemerkung* 7.11 *folgt: Im minimalen Defektfall ($I = \infty$) gibt es zu $\lambda \in K$ keine quadratintegrierbare Lösung: Die s.a. Realisierungen besitzen in $(-\infty, c_1)$ kein Punktspektrum, d.h. $(-\infty, c_1)$ ist enthalten im stetigen Teil des Spektrums.*

Im Defektfall $(3,3)$ ($I < \infty$) hingegen sind $u_3(.,\lambda)$ und $u_4(.,\lambda)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen ($u_{1,2}(.,\lambda) \notin L_1$): $(-\infty, c_1] \subset \sigma_{ess}(H)$, und die spektrale Vielfachheit des stetigen Spektrums in $(-\infty, c_1)$ ist ≤ 1.

Im Fall

$$\tilde{q}(x) \to -\infty\,, \qquad L_0 = K \times [0,\delta)$$

mit einer (beliebig, aber fest gewählten) kompakten Teilmenge $K \subset (-\infty,\infty)$ gilt

$$\mathrm{Re}\,\nu_1(x,z) = \frac{|\tilde{q}|^{1/2}}{|\tilde{p}|^{1/2}}(x)\,(1+o(1))\,.$$

Somit ist $u_2(.,z)$ für $\epsilon \geq 0$ quadratintegrierbar und $\int_a^\infty u_1^*(x,z)\,A(x)\,u_1(x,z)\,dx \approx L$ mit

$$L := \int_a^\infty \frac{w}{|p_s\,q_s|^{1/2}}(x)\,e^{c\int_a^x \frac{|q_s|^{1/2}}{|p_s|^{1/2}}(t)\,dt}\,dx$$

(Konstante $c > 0$).

Eine zum gerade vorgetragenen Fall analoge Argumentation zeigt einerseits, daß $\Lambda(x,z) + \mathrm{diag}\ R_0(x,z)$ die Dichotomiebedingung auf $[a,\infty) \times L_0$ erfüllt (benutze $\mathrm{Im}\ \nu_1 = o(\mathrm{Re}\ \nu_1)$, $\mathrm{Re}\ \nu_3 = o(\mathrm{Re}\ \nu_1)$, $\mu_i^{-1}\,[\theta,\,\vartheta] \to 0$ und Lemma 3.3), sowie andererseits, daß $u_{1,2}(.,\lambda)$ für festes x eine analytische Fortsetzung in $L_0^- := K \times (-\delta,\delta)$ besitzen. Es folgen (beachte $I \leq L$):

Lemma 7.15 *Es gelte $\tilde{q}(x) \to -\infty$, (7.19) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Dann ist der Defektindex im Fall $I = \infty$ minimal, im Fall $(I < \infty \wedge L = \infty)$ gleich $(3,3)$ und schließlich im Fall $L < \infty$ maximal.*

Satz 7.16 *Es gelte $\tilde{q}(x) \to -\infty$, (7.19) und die Bedingungen der asymptotischen Integration seien erfüllt. Für s.a. Realisierungen H gilt im Defektfall $(2,2)$ $(I = \infty)$:*

$$\sigma_{sc}(H) \cap (-\infty,\infty) = \emptyset\,, \quad \sigma_{ac}(H) = (-\infty,\infty) \text{ der spektralen Vielfachheit } 1, \text{ und}$$

die Eigenwerte besitzen in $(-\infty,\infty)$ keine Häufungspunkte.
Im Fall $I < \infty$ besitzen die s.a. Realisierungen H diskretes Spektrum:

$$\sigma_{ess}(H) = \emptyset\,.$$

Beweis: Analog zu dem Beweis von Satz 7.13. □

Bemerkung 7.17 *Im Fall $\tilde{q}(x) \to +\infty$ mit $L_0 = K \times [0,\delta)$, $K \subset (-\infty,\infty)$ eine beliebig, aber fest gewählte kompakte Teilmenge, gilt eine zu Bemerkung 7.14 analoge Aussage: Es ist*

$$Re\,\nu_1(x,z) = \frac{\epsilon}{2\,\tilde{q}^{\,1/2}(x)\,|\tilde{p}|^{1/2}(x)}\,(1+o(1)).$$

Die Dichotomiebedingung ist nicht gleichmäßig in z erfüllt. Unter der zusätzlichen Annahme

$$\frac{\widetilde{p}^{\,2}(t)|\widetilde{q}(x)|}{\widetilde{p}^{\,2}(x)|\widetilde{q}(t)|} \le c\,, \quad a \le t \le x$$

($c > 0$ eine Konstante) jedoch ist die Dichotomiebedingung für festes, relles $z = \lambda$ erfüllt. Mit den bekannten Methoden folgt (beachte $|p_s|^{-3/2}\, r^{1/2}\, w \le w|p_s q_s|^{-1/2}$) :

- Im Fall $(|p_s|^{-3/2}\, r^{1/2}\, w) \notin L_1$ gibt es für reelles $z \in K$ keine quadratintegrierbare Lösung, d.h. es gilt $\sigma_c(H) = (-\infty, \infty)$.
- Im Fall $(|p_s|^{-3/2}\, r^{1/2}\, w) \in L_1$ und $w|p_s q_s|^{-1/2} \notin L_1[a, \infty)$ sind $u_3(.,\lambda)$ und $u_4(.,\lambda)$ zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen, der Defektindex ist also mindestens $(2,2)$, und die spektrale VFH des stetigen Spektrums in $(-\infty, \infty)$ ist ≤ 1.
- Im Fall $w|p_s q_s|^{-1/2} \in L_1[a, \infty)$ sind $u_i(.,\lambda)$, $1 \le i \le 4$, vier linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen, d.h. es liegt maximaler Defektfall vor: $\sigma_{ess}(H) = \emptyset$.

Kapitel 8

Kummer-Liouville Transformation

Ahlbrandt, Hinton und Lewis untersuchten in [3] die Auswirkungen von Variablentransformationen auf die Spektraltheorie der entsprechenden Differentialoperatoren. Wir skizzieren in diesem verbleibenden Kapitel kurz, wie die Kummer-Liouville Transformation in der Situation von (1.2), bzw. dessen Systemform (3.3), im Rahmen der Asymptotischen Integration eingesetzt werden kann.

Formal formuliert lautet eine zentrale Aussage aus [3] (für die exakten Bedingungen siehe ebendort, sowie vgl. [1, 2]): Ist $\tau[y]$ ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck gerader Ordnung und bezeichnet $\mathcal{H}$ wiederum den Hilbertraum $L_2((0,\infty), w\,dx)$ mit Gewichtsfunktion $w > 0$, so kann $\tau[y]$ mit Hilfe einer Variablentransformation (der unabhängigen Variablen x sowie der abhängigen y), der sogenannten Kummer-Liouville Transformation

$$y(x) = \mu(x)\, v(t), \quad t = f(x), \quad \text{mit} \quad \mu(x),\, f'(x) \neq 0\,, \quad x \in [0,\infty)\,, \tag{8.1}$$

zu einem Differentialausdruck $\tilde{\tau}[v]$ transformiert werden, der dieselbe Form und Ordnung besitzt wie τ. Ist nun A eine s.a. Realisierung von τ in $\mathcal{H}$, so gibt es eine unitäre Transformation $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_W := L_2((f(0,\infty)), W(t)\,dt)$,

$$W(t) := \frac{(w\,\mu^2)}{|f'|}\,(x)\,,$$

derart, daß $\widetilde{A} := U\,A\,U^{-1}$ eine s.a. Realisierung von $\widetilde{\tau}$ in $\mathcal{H}_W$ ist: A und $\widetilde{A}$ sind unitär äquivalent. Die Kummer-Liouville Transformation ist also zumindest dann hilfreich, wenn $\widetilde{A}$ leichter zu studieren ist als A.

Nach [3, Satz 2.1, Beispiel 2.7] führt die Kummer-Liouville Transformation, angewandt auf

$$\tau\,y = (r\,y'')'' - (py')' + qy\,,$$

auf die Beziehung (es ist $' = d/dx$ und wir setzen $\gamma(x) := f'(x) > 0$)

$$(\tau\,y)(x) = \frac{\gamma(x)}{\mu(x)}\,(\widetilde{\tau}\,v)(t)$$

mit

$$\widetilde{\tau}\,v = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\widetilde{R}\,\frac{d^2}{dt^2}\,v\right\} - \frac{d}{dt}\left\{\widetilde{P}\,\frac{d}{dt}\,v\right\} + \widetilde{Q}\,v$$

und

$$\widetilde{R}(t) = (r\,\mu^2\,\gamma^3)(x)\,,$$

$$\widetilde{Q}(t) = (q\,\mu^2\,\gamma^{-1})(x) + \frac{\mu}{\gamma}\,[(r\mu'')'' - (p\,\mu')']\,(x)\,,$$

$$\widetilde{P}(t) = (p\,\mu^2\,\gamma)(x) + \left[-2\mu\,\gamma\,r\,\mu'' - \mu\left(\frac{r}{\mu}\,(\mu^2\,\gamma)'\right)' + \frac{r\,\mu'}{\mu}\,(\mu^2\,\gamma)'\right](x)\,.$$

Es ist also (1.2) äquivalent zu $\widetilde{\tau}\,v = z\,W\,v$.

Im Rahmen der im Kapitel *Asymptotische Integration* entwickelten Techniken bringt uns die Transformation (8.1) also nicht weiter: Setzt man beispielsweise

$$t(x) = \int_0^x P(s)\,ds\,, \quad \mu^2(x) = \frac{P}{w}(x) \quad \text{mit} \quad P(x) = \frac{w^{1/4}}{r^{1/4}}(x)\,,$$

so gilt $W(t),\, \widetilde{R}(t) \equiv 1$ und $\widetilde{Q}(t) = \widetilde{q}(x) + Q_1(t)\,,\ \widetilde{P}(t) = \widetilde{p}(x) + P_1(t)$ mit

$$\widetilde{q} := q\,w^{-1}\,, \quad \widetilde{p} := p\,(r\,w)^{-1/2}\,.$$

Die Systemform von $\widetilde{\tau}\,v = z\,v$ ist also gegeben durch (vgl. S. 13)

$$\frac{d}{dt}\,\vec{v}(t,z) = [\widetilde{C}(x,z) + R(t)]\,\vec{v}(t,z)\,, \tag{8.2}$$

wobei $\widetilde{C}$ aus C (2.10) hervorgeht, indem man p, q durch $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ und r, w durch 1 ersetzt, und es ist $R_{31}(t) = Q_1(t)$, $R_{42}(t) = P_1(t)$ und $R_{ij}(t) = 0$ sonst.

(8.2) kann nun mit den hinlänglich bekannten Methoden — vorausgesetzt, daß Q_1

und P_1 Levinson-Terme sind — auf Levinson-Form gebracht werden. Allerdings zeigt ein Vergleich der hieraus resultierenden Bedingungen der Asymptotischen Integration mit den Bedingungen (3.23), (3.24), daß dieses Vorgehen nicht sinnvoll ist.

Wir wenden nun die Matrixversion der Kummer-Liouville Transformation auf die Systemform von Gleichung (1.2) an (zur Erinnerung):

$$u' = C(x,z)\,u \tag{8.3}$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ q - z\,w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = p_1,\ q = q_1,\ r = r_1,\ w = w_1\,.$$

Es ist also $p_i, p_c, q_i, q_c, p_2, q_2, r_2, w_2 \equiv 0$.

Unser Ziel besteht nun darin, (8.3) in ein System der Form (8.2) zu überführen, wobei $\widetilde{C}$ wiederum dieselbe Form wie C besitzt, und die Matrix R soll so bestimmt werden, daß sie (a) nur Levinson-Terme und (b) keine Ableitungen der Ordnung ≥ 3 enthält.

Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir $' = d/dx$ und $\dot{} = d/dt$.

Die Transformation (vgl. [3, Abschnitt 6])

$$u(x,z) = F(x)\,v(t,z)\,, \quad t = f(x)\,, \quad \gamma(x) := f'(x) \neq 0\,,$$

mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} H(x) & 0 \\ K(x) & H^{*^{-1}}(x) \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} \mu(x) & 0 \\ \mu'(x) & (\mu\,\gamma)(x) \end{pmatrix}.$$

führt (8.3) formal auf

$$\dot{v}(t,z) = \gamma^{-1}(x)\,[F^{-1}(x)\,C(x,z)\,F(x) - F^{-1}(x)\,F'(x)]\,v(t,z)\,. \tag{8.4}$$

μ, γ und die 2×2 – Matrix K sind nun entsprechend unserem Vorhaben zu bestimmen. Notwendig für die Existenz von F^{-1} ist

$$H^*\,K = K^*\,H\,,$$

was auf $\mu' K_{22} = \mu (\gamma K_{21} - K_{12})$ führt.
Eine erquickliche Rechnung zeigt, daß es (unter den Voraussetzungen (a) und (b)) vernünftig erscheint, $K_{22} = r \mu^{-1} (\mu^2 \gamma)'$ und $K_{21} \equiv 0$ zu setzen. Diese Wahl erzwingt dann $K_{12} = -\mu' \mu^{-1} K_{22}$ und $K_{11} = p \mu'$.
Durch nachrechnen bestätigt man nun, daß unter diesen Voraussetzungen (8.4) gegeben ist durch

$$\dot{v}(t,z) = [\widetilde{C}(x,z) + L(x)]\, v(t,z) \tag{8.5}$$

mit

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1}\mu^{-2}\gamma^{-3} \\ (q - zw)\mu^2\gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\mu^2\gamma & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu''}{\mu\gamma^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{\gamma}(p\mu')' & \frac{r\mu''}{\mu\gamma}(\mu^2\gamma)' & 0 & \frac{\mu''}{\mu\gamma^2} \\ \frac{r\mu''}{\mu\gamma}(\mu^2\gamma)' & \frac{r\mu'}{\mu}(\mu^2\gamma)' - \mu\left(\frac{r}{\mu}(\mu^2\gamma)'\right)' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die Transformationen (3.9) und (3.20) (sinngemäß) auf (8.5) anwenden: Die Transformation $v_2 = (1+Q)^{-1} T_1^{-1} v$ überführt (8.5) in das äquivalente System

$$\dot{v}_2(t,z) = \{\Lambda + (1+Q)^{-1}[R_1 Q - \dot{Q} + T_1^{-1} L T_1 (1+Q)]\}(x,z)\, v_2(t,z), \tag{8.6}$$

wobei die auftretenden Größen dieselbe Bedeutung wie im Kapitel *Asymptotische Integration* besitzen, wenn man dort p durch $p\mu^2\gamma$, q durch $q\mu^2\gamma^{-1}$, r durch $r\mu^2\gamma^3$, w durch $w\mu^2\gamma^{-1}$, sowie d/dx durch d/dt ersetzt und $R_2 \equiv 0$ setzt.

Fall: $\tilde{p} = p/(rw)^{1/2}$, $\tilde{q} = q/w$ beschränkt

Wir setzen die Kummer-Liouville Transformation so an, daß r, w zu 1 und p, q zu den modifizierten Koeffizienten $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ transformiert werden:

$$t(x) = \int_0^x P(s)\, ds\,, \quad \mu^2(x) = P(x)\, w^{-1}(x)\,, \quad P(x) = \frac{w^{1/4}}{r^{1/4}}(x)$$

mit $P(.) \notin L_1([a,\infty),\, dx)$.

Der Satz von Levinson kann also auf (8.6) angewandt werden, vorausgesetzt, daß die Bedingungen der Asymptotischen Integration (3.23) und (3.24), sowie $T_1^{-1} L T_1 \in L_1(dt)$ erfüllt sind (natürlich sind die drei Fälle von Seite 41 zu unterscheiden). Eine direkte Rechnung bestätigt nun, daß diese Bedingungen im Fall $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ beschränkt erfüllt sind, wenn gilt:

$$P^{-1}\left[\frac{p'}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q'}{w}\,,\ \frac{r'}{r}\,,\ \frac{w'}{w}\right] \to 0$$

$$P^{-1/2}\left[\frac{p'}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q'}{w}\,,\ \frac{r'}{r}\,,\ \frac{w'}{w}\right] \in L_2$$

$$P^{-1}\left[\frac{p''}{(r\,w)^{1/2}}\,,\ \frac{q''}{w}\,,\ \frac{r''}{r}\,,\ \frac{w''}{w}\right] \in L_1$$

Diese Bedingungen entsprechen also exakt den Bedingungen (4.4) – (4.6), wenn man dort $p_1 = p$, $q_1 = q$, $r_1 = r$, $w_1 = w$ setzt.

Fall: $(1-\gamma)\, 4\, \tilde{q} - \tilde{p}^2 \to \infty\,, \quad \gamma \in (0,1)$

Diesmal setzen wir

$$t(x) = \int_a^x P_q(s)\, ds\,, \quad \mu^2(x) = P_q(x)\, q^{-1}(x)\,, \quad P_q(x) = \frac{q^{1/4}}{r^{1/4}}(x)$$

mit $P_q(.) \notin L_1([a,\infty),\, dx)$ und $z \in L_0 = A \times [0,\delta)\,,\ A \subseteq I\!R$ kompakt.

In diesem Fall werden also r, q zu 1 und p zu $p\,(rq)^{-1/2}$ und w zu $\tilde{q}^{-1}$ transformiert. Wiederum zeigt eine direkte Rechnung, daß die Bedingungen der Asymptotischen Integration gegeben sind durch

$$P_q^{-1}\left[\frac{p'}{(r\,q)^{1/2}}\,,\ \frac{q'}{q}\,,\ \frac{r'}{r}\,,\ \frac{w'}{q}\right] \to 0$$

$$P_q^{-1/2}\left[\frac{p'}{(r\,q)^{1/2}}\,,\ \frac{q'}{q}\,,\ \frac{r'}{r}\,,\ \frac{w'}{q}\right] \in L_2$$

$$P_q^{-1}\left[\frac{p''}{(r\,q)^{1/2}}\,,\ \frac{q''}{q}\,,\ \frac{r''}{r}\,,\ \frac{w''}{q}\right] \in L_1$$

Die Bedingungen entsprechen also (5.5) – (5.7).

Die Berechnungen dieses Kapitels zeigen also, daß die Kummer-Liouville Transformation im Rahmen der Theorie der Asymptotischen Integration in der Tat einen sinnvollen, alternativen Zugang zum Studium der Spektraltheorie darstellt.

Anhang A

Danksagung

Abschließend bleibt die angenehme Aufgabe, den Menschen zu danken, die das Entstehen dieser Arbeit begleitet haben:
Herrn Prof. Dr. H. Behncke danke ich für die Betreuung dieser Arbeit, insbesondere für die zahlreichen nützlichen und herzerfrischenden Diskussionen.
Herrn Dr. C. Remling verdanke ich viele detaillierte Antworten auf meine – zugegebenermaßen – zuweilen weniger präzise formulierten Fragen.
Meinen Kollegen A. Fischer und J. Seißler gilt mein Dank für die moralische Unterstützung.
Herrn F. Leifermann danke ich fürs Korrekturlesen, und meinem Freund Dr. T. Stegemann für etliche nichtmathematische Abende.
Ein besonderer Dank gilt meiner Frau Katharina Abels, die mir in dieser Zeit den Rücken frei hielt, und unseren Kindern Sarah, Ruth und Julius für die notwendige Abwechslung.

Literaturverzeichnis

[1] C. D. Ahlbrandt, Equivalence of Differential Operators, Lect. Notes Math. **846** (1981), 1–16.

[2] C. D. Ahlbrandt, D.B. Hinton and R.T. Lewis, Some Unitarily Equivalent Differential Operators With Finite And Infinite Singularities, Lect. Notes Math. **846** (1981), 17–25.

[3] C. D. Ahlbrandt, D.B. Hinton and R.T. Lewis, The Effect of Variable Change on Oscillation and Disconjugacy Criteria with Applications to Spectral Theory and Asymptotic Theory, *J. Math. Anal. Appl.* **81** (1981), 234–277.

[4] N. I. Akhiezer and I.M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space I, II Pitman, London 1981.

[5] F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York 1964.

[6] H. Behncke, Absolute Continuity of Hamiltonians with von Neumann Wigner Potentials, *Proc. AMS* **111** (1991), 373–384.

[7] H. Behncke, Absolute Continuity of Hamiltonians with von Neumann Wigner Potentials II, *Manuscr. Math.* **71** (1991), 163–181.

[8] H. Behncke, The m-function for Hamiltonians with Wigner-von Neumann Potentials, *J. Math. Phys.* **35** (1994), 1445–1462.

[9] H. Behncke and C. Remling, Asymptotic Integration of Linear Differential Equations, erscheint *Math. Nachrichten* .

[10] H. Behncke, D. Hinton and C. Remling, The Spectum of differential operators of order $2n$ with almost constant coefficients, erscheint *J. Differential Equations*.

[11] B. M. Brown, M. S. P. Eastham, W. D. Evans, V. G. Kirby, Repeated diagonalization and the numerical computation of the Titchmarsh-Weyl $m(\lambda)$-function, *Proc. Roy. Soc. London A* **445** (1994), 113–126.

[12] S. L. Clark, A Criterion for Absolute Continuity of the Continuous Spectrum of a Hamiltonian System, *J. Math. Anal. Appl.* **151** (1990), 108–128.

[13] E. A. Coddington, The spectral representation of ordinary self–adjoint differential operators, *Bull. Ann. of Math.* Second Ser. **60** (1954), 192–211.

[14] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York 1955.

[15] W. A. Coppel, Stability and asymptotic behaviour of differential equations, Heath, Boston 1965.

[16] W. A. Coppel, Disconjugacy, Springer–Verlag Lecture No tes in Mathematics, Vol. 220, Berlin, 1971.

[17] A. Devinatz, The deficiency index of certain fourth-order ordinary self-adjoint differential operators, *Q. J. Math. (Oxford), Ser. 2* **23** (1972), 267–286.

[18] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, II, Interscience, New York, 1963.

[19] M.S.P. Eastham, Sturm-Liouville Equations and purely continuous Spectra, *Nieuw Archief voor Wiskunde (3)* , **XXV** (1977), 169–181.

[20] M. S. P. Eastham, The deficiency index of even-order differential equations, *J. London Math. Soc., Ser. 2* **26** (1982), 113–116.

[21] M.S.P. Eastham, Repeated diagonalization and extended Liouville–Green asymptotic formulae, *J. London Math. Soc., Ser. 2* **36** (1987), 115–125.

[22] M.S.P. EASTHAM, The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems, London Math. Soc. Monographs New Series 4, Clarendon Press, Oxford 1989.

[23] M. S. P. EASTHAM AND C. G. M. GRUDNIEWICZ, Asymptotic theory and deficiency indices for fourth and higher order self-adjoint equations: A simplified approach, *Proc. Dundee Conf. Ordinary and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics* 846, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981.

[24] W. N. EVERITT AND A. ZETTL, Generalised symmetric ordinary differential expressions I: the general theory, *Nieuw Arch. Wisk.* **27** (1979), 363–97.

[25] M. V. FEDORJUK, Asymptotic methods in the theory of one-dimensional singular differential operators, *Trans. Moscow Math. Soc.* **15** (1966), 333–386.

[26] D. J. GILBERT AND D.B.PEARSON, On Subordinacy and Analysis of the Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators, *J. Math. Anal. Appl.* **128** (1987), 30–56.

[27] I.M. GLAZMAN, Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965.

[28] C. G. M. GRUDNIEWICZ, Asymptotic methods for fourth-order differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edin.* **87A** (1980), 53–63.

[29] W. A. HARRIS AND D.A. LUTZ, On the asymptotic integration of linear differential systems, *J. Math. Anal. Appl.* **48** (1974), 1–16.

[30] W. A. HARRIS AND D.A. LUTZ, A unified theory of asymptotic integration, *J. Math. Anal. Appl.* **57** (1977), 571–586.

[31] P. HARTMAN AND A. WINTNER, Asymptotic Integrations of Linear Differential Equations, *Am. J. Math.* **77** (1955), 48–86 and 932.

[32] E. HILLE, Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison–Wesley, Reading, 1969.

[33] D. B. Hinton, Asymptotic behavior of the solutions of $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$, *J. Differential Equations* **4** (1968), 590–596.

[34] D. B. Hinton and A. Schneider, On the Titchmarsh-Weyl Coefficients for Singular S-Hermitian Systems I, *Math. Nachr.* **163** (1993), 323–342.

[35] D. B. Hinton and A. Schneider, On the Titchmarsh-Weyl Coefficients for Singular S-Hermitian Systems II, *Math. Nachr.* **185** (1997), 67–84.

[36] D. B. Hinton and J. K. Shaw, On Titchmarsh-Weyl $M(\lambda)$-Functions for Linear Hamiltonian Systems, *J. Differential Equations* **40** (1981), 316–342.

[37] D. B. Hinton and J. K. Shaw, On the Spectrum of a Singular Hamiltonian System, *Quaestiones Mathematicae* **5** (1982), 29–81.

[38] K. Kodaira, On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. J. of Math.*, **72** (1950), 502–544.

[39] A. M. Krall, $M(\lambda)$ Theory for Singular Hamiltonian Systems with One Singular Point, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 664–700.

[40] H. Krumhaar, Zur Theorie der gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperatoren gerader Ordnung, *Math. Annalen*, **130** (1955), 109–136.

[41] N. Levinson, The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, *Duke J. Math.* **15** (1948), 111–126.

[42] B. M. Levitan and I.S. Sargsjan, Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 39, Providence, R.I., 1975.

[43] M.A. Neumark, Lineare Differentialoperatoren, Mathematische Lehrbücher und Monographien, Akademie–Verlag, Berlin 1960.

[44] J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.* **102** (1929), 49–131.

[45] H.D. Niessen, Singuläre S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme, *manuscr. math.* **3** (1970), 35–68.

[46] H.D. Niessen, Greensche Matrix und die Formel von Titchmarsh-Kodaira für singuläre S-hermitesche Eigenwertprobleme, *J. für die reine und angew. Math.* **261** (1973), 164–193.

[47] R. B. Paris and A. D. Wood, Asymptotics of high order differential equations, Pitman Research Notes in Mathematics 129. Longman, London 1986.

[48] D.B.Pearson, Value distribution and spectral analysis of differential operators, *J. Phys.***26** (1993), 4067–4080.

[49] M. Pinto J., Asymptotic Integration of Second - Order Linear Diffferential Equations, *J. Math. Anal. Appl.* **111** (1985), 388–406.

[50] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics: I–IV, Academic Press, New York 1975–1980.

[51] C. Remling, Spektraltheorie gewöhnlicher Differentialoperatoren mit Hilfe der m-Funktion, Dissertation, Osnabrück 1996.

[52] C. Remling, Spectral analysis of higher order differential operators I: General Properties of the M–Function, *J. London Math. Soc.* **58** (1998), 367–380.

[53] C. Remling, Spectral analysis of higher order differential operators II: Fourth order equations, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), 188–206.

[54] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York 1987.

[55] A.R. Sagitova, On the deficiency indices of a differential operator of fourth order, *Math. Notes* **57** (1995), 223–224.

[56] F.W. Schäfke und A. Schneider, S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme II, *Math. Annalen* **165** (1966), 236–260.

[57] A. Schneider, Untersuchungen über singuläre reelle S-hemitesche Differentialgleichungssysteme im Normalfall, *Math. Z.* **107** (1968), 271–296.

[58] B. SIMON, Spectral analysis of rank one perturbations and applications, *Am. Math. Society* CRM Proc. Lect. Notes. **8** (1995), 109-149

[59] B. SIMON, Schrödinger Operators in the twentieth century, preprint (2000).

[60] E. C. TITCHMARSH, Eigenfunction expansions associated with second order differential equations I/II, Oxford University Press, London, 1962/1970.

[61] P. W. WALKER, Asymptotica of the solutions to $((r\,y'')' - p\,y')' + q\,y = \sigma\,y$, *J. Diff. Equations* **9** (1971), 108–132.

[62] P. W. WALKER, Deficiency indices of fourth-order singular differential operators, *J. Diff. Equations* **9** (1971), 133–140.

[63] P. W. WALKER, Asymptotics for a class of fourth-order differential equations, *J. Diff. Equations* **11** (1972), 321–334.

[64] P. W. WALKER, A Vector-Matrix Formulation For Formally Symmetric Ordinary Differential Equations With Applications To Solutions Of Integrable Square, *J. London Math. Soc. (2)* **9** (1974), 151–159.

[65] J. WEIDMANN, Lineare Operatoren in Hilberträumen, B. G. Teubner, Stuttgart 1976.

[66] J. WEIDMANN, Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Springer Lecture Notes 1258, Berlin-Heidelberg 1987.

[67] H. WEYL, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Annalen* **68** (1910), 220–269.

[68] A. WINTNER, On the normalization of characteristic differentials in continuous spectra, *Phys. Rev.* **72** (1947), 516–517.

[69] A.D. WOOD, Deficiency indices of some fourth order differential operators, *J. London Math. Soc. (2)* **3** (1971), 96–100.

[70] A.D. Wood, On the deficiency indices of a fourth order singular differential operator, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh* **84A** (1979), 173–176.